Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

62e jaargang
1986 | 1987
april

Euclides 7

Wolters-Noordhoff

Euclides

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 9 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
Secretaris Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Prof. dr F. Goffree, Bremlaan 16, 3735 KJ Bosch en Duin, tel. 030-78 37 23. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½, bij voorkeur op Euclides-kopijbladen. De redactiesecretaris P. E. de Roest, Blijhamsterweg 94, 9672 XA Winschoten, tel. 05970-2 20 27 stuurt desgevraagd kopijbladen met gebruiksaanwijzing toe. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs H. Bakker, Breitnerstraat 52^{c}, 8932 CD Leeuwarden, tel. 058-13 59 76.

Inlichtingen over en opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 RR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 44,75. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 26,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 63 08. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 7,50 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

ISSN 01.65-0394

Is het wiskunde-onderwijs in Nederland nou nog niet af?*

Sieb Kemme

Inleiding

Een aantal jaren geleden werd in het VPRO-programma 'Het gat van Nederland' enthousiast vastgesteld dat Nederland 'af' is. Wij, Nederlanders, zijn klaar. Ieder dorp heeft zijn eigen snelweg. Met de Oosterscheldedam zijn de deltawerken af. We hebben een prachtig sociaal stelsel. Horizontale en vertikale doorstroming in het onderwijs is goed geregeld. Van nu af aan loopt alles verder wel op rolletjes. We kunnen rustig naar huis gaan en genieten van de tijd die vroeger vrije tijd heette.
Natuurlijk is dit alles ironisch bedoeld. Maar het aardige van de ironie is dat die uitgaat van het idee dat iets 'af' kan zijn. Dat we proberen dingen te maken door de eeuwigheid, dat we onze zaakjes zo perfekt willen regelen dat van nu af aan alle problemen opgelost zijn.

Wat voor Nederland geldt, geldt natuurlijk ook voor het wiskunde-onderwijs in Nederland. Ook daar proberen we onze zaakjes zo goed mogelijk te regelen en stellen we zo af en toe met grote voldoening vast dat er veel verbeterd is bij vroeger. We zijn natuurlijk nog niet helemaal klaar. Laten we maar eens kijken hoever we nog van 'af' zitten. Als vakdidaktikus zal ik op die vraag natuurlijk reageren als een ingenieur van Rijkswaterstaat: 'Nee, we zijn nog lang niet klaar. Er is nog een Waddenzee en de IJsselmeerdijken zijn te laag, ...'. Het lijkt me beter de situatie te beoordelen vanuit de praktijk van het onderwijs. Dus vanuit het standpunt van de gebruikers. Zoiets valt niet mee voor iemand die nu ook weer niet zoveel leservaring heeft en waarvan de leerling-ervaringen nog veel verder weg liggen. Toch zal ik me proberen te verplaatsen in de positie van leraar en leerling. Er zullen genoeg leraren zijn (en misschien ook leerlingen) die me op de vingers zullen tikken. Dat doet pijn, maar ik heb het er graag voor over als we daarmee een beter beeld krijgen van de stand van zaken van het wiskunde-onderwijs in Nederland.

Bij het inventariseren van de huidige situatie bekijk ik de wiskunde en informatica in de volgende gebieden:
- basisschool,
- mavo/lbo en onderbouw havo-vwo,
- bovenbouw havo-vwo.

Waarom deze keuze? Het dekt de wiskunde en informatica als algemeen vormende vakken in het onderwijs. Wiskunde in het beroepsonderwijs is minstens zo aktueel, maar het vraagt een heel andere benadering en daarmee zou mijn verhaal te ingewikkeld worden. Bovendien zal mijn aandacht vooral gericht zijn op de wiskunde en niet op de informatica. Van dat laatste weet ik gewoon niet genoeg.

De basisschool

Het reken-, wiskunde-onderwijs op de basisschool is af. De feiten:
- wiskobas is inmiddels tot alle methodes doorgedrongen[1],
- we weten nu ook hoe het met de zakrekenmachine moet[2],
- we hebben een theorie waaruit we begrijpen waarom het vroeger niet zo goed ging[3],
- de beginselen van de informatica bedrijven we met LOGO,
- voor leerlingen die het niet zo snel kunnen hebben we remedial programma's,
- zelfs de opleiding tot onderwijsgevende is geregeld[4],
- de onderwijsbegeleiding is geregeld, inclusief nascholing[5].

Ik ben vast wat vergeten, maar deze feiten zijn toch indrukwekkend genoeg! Er blijft nog wel wat werk over, maar dat is op een oor na gevild:
- voor het onderwijs in verhoudingen en breuken zijn we bijna rond[6],

- computerprogramma's ter ondersteuning van de rekenvaardigheid zijn bijna af[7],
- het nationaal plan voor reken- en wiskunde-onderwijs verkeert al in de derde fase!

Wat willen we nog meer? Het eind is in zicht. Voor augustus 1987 moet dat lukken. Terecht besluit de SLO om het basisschoolprojekt vanaf augustus 1987 niet meer voort te zetten. Zelfs de NVORWO[8] lijkt deze mening toegedaan in haar reactie op de voornemens van de SLO. Maar voegen ze daaraan toe: 'Er zijn een groot aantal gebieden aan te wijzen die nog nieuwe of verdergaande ontwikkelingen vereisen. Genoemd worden:
- reken-/wiskunde-onderwijs aan kleuters, o.a. gericht op het opheffen van de aansluitingsproblematiek kleuter- lager-onderwijs,
- het reken-/wiskunde-onderwijs voor kinderen in achterstandssituaties en uit ethnische minderheden,
- ontwikkeling van materialen en werkwijzen voor gedifferentieerd onderwijs en vergroting van de zorgbreedte,
- het aanleren van basisvaardigheden, hoofdrekenen, het schattend en toegepast rekenen,
- gebruik en toepassingen van de zakrekenmachine,
- bruikbare en bij het realistisch reken-/wiskunde-onderwijs aansluitende computersoftware,
- concretiseringen van ideeën en onderzoeksresultaten met betrekking tot het onderwijs in verhoudingen en vooral breuken.

De laatste drie punten stonden ook op mijn lijstje. Aan al die andere had ik niet gedacht. Ik was dus wat te optimistisch. Nou goed dan maken we er augustus 1988 van. Zijn we dan echt klaar? Nee, natuurlijk niet. Het komt nooit af. Om dat duidelijk te maken zal ik me concentreren op één onderwerp dat nog niet genoemd is: de aansluiting basisonderwijs – voortgezet onderwijs, BOVO in de volksmond. Ik ga eerst maar eens terug naar mijn eigen leerling-ervaringen. Op 15 juni 1957 deed ik toelatingsexamen voor de roomskatholieke HBS St. Martinus te Bolsward. Een prachtige voorjaarsdag. Ik had de korte broek al aan. 's Morgens ging het over rekenen, 's middags over taal. Breuken, decimale getallen, staartdelingen, maten, enzovoorts. Bloednerveus was ik. Maar ik slaagde! Nu vinden we dat zoiets niet mag. De kans is te groot dat leerlingen louter en alleen door de zenuwen afgaan. Bovendien kan een potentieel goede leerling de boot missen omdat die toevallig op een school heeft gezeten waar het rekenonderwijs niet zo op dat niveau was afgestemd. Terecht is dat toen veranderd. Maar gaat het nu zoveel beter? Nee. Er is nog steeds een geweldig probleem in de aansluiting basisonderwijs – voortgezet onderwijs. Maar het is een heel ander soort probleem geworden. Gelukkig zijn er nu meer kansen voor leerlingen om in het voortgezet onderwijs terecht te komen dan in 1957, maar nog steeds haken leerlingen in de brugklas af omdat de aansluiting tussen voortgezet onderwijs en basisschool nog steeds te wensen overlaat. Ik zocht wat inspiratie voor deze bijeenkomst bij een onderwijzer en vroeg hem wat er naar zijn idee diende te veranderen aan het rekenonderwijs op de basisschool. Eerst reageerde hij daar nauwelijks op. Hij was zelf wel tevreden over zijn eigen onderwijs. Na wat doorpraten kwam hij tot de conclusie dat een beetje meer uniformiteit tussen de verschillende methodes toch wel erg gewenst is. Er zijn gigantische verschillen tussen die methodes dus je weet eigenlijk niet waar je aan toe bent. Als onderwijzer vaar je blind op je eigen methode en je gokt er maar op dat je leerlingen daar in het voortgezet onderwijs mee verder kunnen. We hebben prachtige spullen gemaakt voor de basisschool maar we zijn er nog niet. Het basisonderwijs zal in samenwerking met het voortgezet onderwijs tot een plan moeten komen dat enerzijds wat meer eenheid biedt terwille van de doorstroming en anderzijds voldoende ruimte laat aan de verschillen in wiskundig-didaktische visie van de leraren in het basisonderwijs en het voortgezet onderwijs.

Maar dan zijn we er nog niet. Als we terugkijken dan zien we dat basisschool en voortgezet onderwijs gigantisch uit elkaar zijn gegroeid in hun opvattingen over onderwijs. Het zittenblijven is uit de basisschool verdwenen. Er wordt niet geselekteerd door middel van prestaties voor rekenen. Daarmee staan feitenkennis en mechanistische vaardigheden veel minder centraal in de basisschool dan in mijn tijd het geval was. De vele en lange staartdelingen zijn verdwenen. Maar het zittenblijven bestaat nog steeds in het voortgezet onderwijs en daarin speelt het wiskunde-onderwijs een belangrijke rol. Dat betekent dat gemakkelijk te toetsen leerstof van belang blijft. Zoals: het vereenvoudigen van inge-

wikkelde lettervormen, het tekenen van grafieken volgens een vast stramien,... Beide schooltypen hebben daar hun eigen goed doordachte argumenten voor. Ik laat me er niet over uit of ik die argumenten wel of niet terecht vind, maar ik constateer dat ze er zijn en dat ze weloverwogen zijn. Het is een goede zaak om te proberen basisschool en voortgezet onderwijs op dit punt wat dichter bij elkaar te krijgen, maar het is geen probleem dat we in eindige tijd voor alle eeuwigheid kunnen oplossen. Beide vormen van onderwijs zullen onder invloed van maatschappij en *ministerie* blijven veranderen en verschillen zullen er blijven bestaan. Het zal een probleem blijven dat we voortdurend opnieuw zullen moeten oplossen. Kortom: dat krijgen we nooit af.

Wiskunde 12-16

Onder deze titel werd oktober 1986 de studiedag van de vereniging van wiskundeleraren georganiseerd. De opkomst was groter dan we de laatste jaren gewend waren. Is er soms iets mis met het wiskunde-onderwijs in de leeftijdscategorie 12 tot 16? Wat is er dan mis? En hoe kan dat dan? In 1968 hebben we alles toch zo netjes geregeld? Er kwam een leerplan waarin de verzamelingenleer als wiskundig en didaktisch uitdrukkingsmiddel een belangrijke rol speelde. Er kwam daarmee een zekere eenheid in de programma's waarmee een horizontale doorstroming tussen de verschillende schooltypes mogelijk werd. We zijn nu ontevreden. We vinden dat het niet werkt. Dat de verzamelingenleer géén goed wiskundig uitdrukkingsmiddel is voor de leerlingen. Dat het leidt tot klakkeloze kennis, tot nageaapte halfbegrepen notaties. Je vraagt je af hoe men zich toen in 1968 zo heeft kunnen vergissen. Het programma van 1968 is weloverwogen ingevoerd, men is niet over één nacht ijs gegaan. Er is een commissie geweest die alles heeft uitgekiend. Er zijn experimenten geweest. Er is een *goed betaalde* nascholing geweest. Men heeft zich niet vergist. Toen dacht men dat dat het best haalbare programma was. Maar er is veel veranderd sinds 1968. Ik noem een paar zaken:

- de strukturalistische stroming binnen de wiskunde is uit de mode,
- door de computer zijn toepassingen binnen en buiten de wiskunde een steeds grotere rol gaan spelen,
- we zijn kritischer geworden ten aanzien van de maatschappelijke doelstellingen van het onderwijs,
- door de schaalvergrotingen in het onderwijs is er minder ruimte voor de leraar voor een persoonlijke interpretatie en invulling van het programma,
- onze didaktische inzichten zijn veranderd.

Kortom: het programma van 1968 is verouderd. Ik zal met een voorbeeld proberen duidelijk te maken wat er, naar mijn idee, mis is gegaan.

Eén van de dingen die mij op dit ogenblik het meest storen in het wiskunde-onderwijs in de onderbouw is het spastische gedoe met de zakrekenmachine. Alle leerlingen gebruiken het ding bij hun huiswerk en bijna alle leraren verbieden het gebruik ervan in de klas. Ik heb leraren horen verklaren dat het ding niet vóór de vierde klas het lokaal inkomt. Ik moet ieder jaar weer een robbertje knokken om studenten ervan te overtuigen dat je dat ding prima kunt gebruiken en die knokpartij verlies ik ook nog vaak genoeg. Wat is er aan de hand?

$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.70$ is fout want $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Waarom?

Omdat:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Nee, dat bedoel ik niet. Waarom zoek je juist deze vorm? Om handig uit je hoofd te kunnen rekenen of met een tabel te kunnen werken. Maar daar hebben we nu juist de ZRM voor.

Wiskunde 12-16 moet tot nu toe nog steeds systematische onderwijsexperimenten met de zakrekenmachine ontberen. Wat voor de basisschool wel is gelukt lukt hier niet. Wie maakt er nu eindelijk eens een goed plan voor verstandig gebruik van de zakrekenmachine in wiskunde 12-16. Een plan dat niet alleen een opsomming is van toetsbare onderwerpen maar ook een beschrijving van de leerweg bevat zodat zichtbaar is hoe leerlingen met dit onderwerp bezig kunnen zijn.
Waarom zoveel aandacht voor de zakrekenmachine? Het is een voorbeeld van een niet-voorziene ontwikkeling in de samenleving die van direkte

invloed is op de gewone wiskunde in de klas. Zo zijn er natuurlijk meer.
Gelukkig hebben we inmiddels niet stil gezeten. Het WISKIVON materiaal heeft ons de weg gewezen naar zinvol wiskunde-onderwijs voor deze leeftijdskategorie. De SLO werkt dit verder uit door het ontwikkelen van nieuw materiaal en het exploreren van lange didaktische lijnen in de leerstof. Doorwerking van dit alles is al zichtbaar in de diverse schoolmethodes: Moderne Wiskunde, 4e editie, Wageningse methode, Wiskunde Lijn, Wiskunde Exakt. We zijn een heel eind, maar we zijn er nog lang niet. Het examen lbo en mavo is onveranderd gebleven en de nieuwe ontwikkelingen sluiten slecht aan bij dit examen. De stuurgroep in oprichting zal dat probleem even voor ons oplossen. Ze zullen mooie dingen bedenken over de basisvorming rekenen en meetkunde, over het kunnen lezen, interpreteren en toepassen van formules. Misschien bedenken ze zelfs iets over het gebruik van de computer: databases, spreadsheets en dergelijke.
Is het wiskunde-onderwijs 12-16 dan eindelijk af? Zijn we dan klaar? Nee. Ook dat programma zal weer sterk zijn ingegeven door de situatie van dit ogenblik. Dat is nu eenmaal het noodlot van onderwijs: het loopt altijd achter de ontwikkelingen aan.

De bovenbouw havo-vwo

Voor het vwo zijn we in ieder geval voor de eerste tien jaar klaar. Door Hewet zijn de belangrijkste problemen opgelost. Voor het havo duurt het nog even, maar dat moet toch ook binnen 5 jaar te regelen zijn. Hawex staat voor de deur. Na het verschijnen van het definitieve rapport is het nog maar een kwestie van uitvoeren: leerstof bedenken in een experimentele opzet, voorzichtig op een paar scholen beginnen, nascholing organiseren, schrijvers van schoolmethodes tijdig informeren, enz. ...
Valt er nog wat te doen in havo-vwo? Ik kijk deze keer eens niet naar wiskunde A, maar naar wiskunde B en wel naar één onderdeel daaruit: de introductie van limieten. Een heel klassiek onderdeel waar nog nooit wat over te doen is geweest. Iedere zichzelf respecterende methode bevat een hoofdstuk over de introductie van limieten door middel van omgevingen of door middel van één of andere ε-δ formulering. Natuurlijk staat het er niet zo formeel als in de teksten voor eerstejaars wiskunde studenten, maar over het algemeen zijn de formuleringen wiskundig correct. Het limietbegrip komt in wiskunde A intuïtief aan de orde bij het definiëren van de afgeleide van een functie. Bij de nascholingsbijeenkomsten voor Hewet waren er altijd één of twee leraren in een groep die dat maar niks vonden. 'Je praat de leerlingen dan maar wat aan', vonden ze. Bij wat doorpraten blijkt dat bij wiskunde 1 limieten maar bij een paar zo netjes worden ingevoerd als in het boekje staat, dat maar één of twee leerlingen dat snappen en dat dat nooit op het proefwerk gevraagd wordt. De meeste leraren slaan dat gedoe met die omgevingen gewoon over en stomen zo snel mogelijk door naar het uitrekenen van limieten met behulp van standaard limieten. Een bewijs voor

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

wordt soms wel gegeven, maar altijd met de opmerking erbij dat het niet gevraagd wordt op het proefwerk. De argumentatie daarbij is dat 'ze zoiets dan toch maar een keer gezien hebben'. Dit is een gekke situatie, zeker voor de leerling. Moet je dat nu wel of niet proberen te snappen? Een niet gesnapt bewijs is geen bewijs. Hoe ontstaat nu zo'n situatie? Ik noem een paar oorzaken:

- een formeel bewijs is erg moeilijk te volgen als je daar geen achtergrond-informatie bij hebt: waarom een bewijs, waarom déze bewijsmethode, wat is het belang van de stelling, ...?
- veel leraren hebben die achtergrond-informatie zèlf niet, maar zijn in hun studie ook opgezadeld met een bewijs zondermeer, dat bovendien nog voorzien was van het stempel: belangrijk.
- het bewijs wordt niet op het examen gevraagd.

Vooral dat laatste is belangrijk. Waarom wordt het niet gevraagd op het examen? Het was in 1968 toch belangrijk genoeg om het in het leerplan op te nemen? Je kunt hier toch ook wel opgaven bij bedenken? Impliciet zijn we het in de loop van de tijd kennelijk met elkaar eens geworden dat dit geen communaal einddoel is voor wiskunde B (om het nu maar eens deftig te zeggen). Maar wordt het dan niet eens tijd om het hele wiskunde B programma eens grondig door te lichten op dit soort situaties?

En laten we dan meteen eens kijken naar de toekomst waarin een vwo leerling met de computer veel sneller en mooier grafieken van functies kan tekenen dan nu. Dan zou het best eens kunnen zijn dat de technieken voor het berekenen van afgeleiden, limieten en integralen wat minder aandacht kunnen krijgen ten voordele van dieper liggende theoretische aspekten zoals het bewijs van:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Een dergelijk gebruik van de computer hoeft helemaal niet te betekenen dat de wiskunde daarmee de toegepaste hoek in schuift. Integendeel, op dit ogenblik wordt op alle fronten winst geboekt dankzij de computer, ook op het theoretische zuiverwiskundige front. Het leren hanteren van de computer als onderzoeksinstrument in de wiskunde vereist echter een goed samenspel tussen theoretische achtergrond en praktische ervaring. Het is iedere keer de afwisseling tussen theorie en praktijk die de leerling aan het denken zet en daarmee tot het interpreteren van de resultaten en het formuleren van zinvolle vragen.
Met dit voorbeeld heb ik willen laten zien dat zelfs het oude gerenommeerde wiskunde B programma niet af is en ook niet af zal komen. Ook hier ontstaan, door wisselwerking tussen de praktijk van het onderwijs en ontwikkelingen in de maatschappij, steeds nieuwe situaties en inzichten die een voortdurende aanpassing van het programma rechtvaardigen.

Tenslotte

Deltawerken komen af, het wiskunde-onderwijs komt nooit af. Dat heb ik in het voorgaande in vogelvlucht en fragmentarisch proberen aan te tonen. Daarmee wil ik tegelijkertijd een pleidooi houden voor het oppakken van een oude draad. In de zestiger jaren werd de CMLW opgericht. Dat stond voor: Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde. Die naam dekt precies wat ik bedoel: het aanpassen van het wiskunde-onderwijs aan de huidige situatie. Dat is een permanente aktiviteit. Het was dan ook een permanente commissie die met de geboorte van de SLO in ACLO overging en daarmee grootouder werd van de huidige VALO.
VALO staat voor: VeldAdvies LeerplanOntwikkeling. De VALO werd in februari 1986 in het leven geroepen. Het is de opvolger van de ACLO met als taak de advisering vanuit het onderwijsveld met betrekking tot de aktiviteiten van de SLO. Daartoe dient de VALO, onder andere, de meningsvorming in het onderwijsveld te stimuleren over de behoeften die er zowel in de nabije als in de wat verdere toekomst aan leerplanontwikkeling zijn.
Soms slaan de trekken van een kind een generatie over en lijkt het kleinkind op één van zijn grootouders. Voor de VALO zouden we dat ook graag willen: een permanente commissie die aktiviteiten op gang brengt en coördineert rondom een voortdurende modernisering van het leerplan rekenen, wiskunde en informatica. Daar kan dan de SLO haar voordeel mee doen, maar ook: OW & OC, boekenschrijvers, verzorgers, opleiders, leraren, leerlingen... Dat betekent dat de VALO een nauwe relatie met het veld dient te onderhouden. Was de CMLW vooral op basis van externe deskundigheid ingesteld, de VALO zal een veel hechtere band met het veld dienen te hebben. De VALO luistert naar het veld door middel van gevraagd en ongevraagd advies. Dat kan een nieuw verschijnsel in de leerplanontwikkeling betekenen doordat een permanente mogelijkheid van voortdurende toetsing en legitimering kan gaan ontstaan. Maar er zit ook een gevaar in. Het kan de ontwikkelingen tè dienstbaar maken aan het veld. Die ontwikkelingen zouden dan alleen maar een richting uit kunnen gaan die door het veld gewenst worden. Dat kan zinvolle ontwikkelingen belemmeren in richtingen die niet door het veld kunnen worden overzien. Daarom hebben we ook andere deskundigen nodig: leerplan-, leerstof- ontwikkelaars, schoolbegeleiders, vakdidaktici, lerarenopleiders. Mensen die een wat breder overzicht hebben over de ontwikkelingen van het wiskunde-onderwijs op dit ogenblik en in de toekomst. Door middel van studiedagen, conferenties, e.d. wil de VALO proberen een ontmoetingspunt te worden van waaruit permanent gewerkt kan worden aan de leerplan-, leerstofontwikkeling van het wiskunde-onderwijs in Nederland.

Noten:

* Lezing gehouden bij de presentatie van de VALO wiskunde en informatica.
1 R. de Jong onderzocht de invloed van WISKOBAS in de huidige methoden voor de basisschool en kwam tot de conclusie dat die aanzienlijk is. Zie: R. de Jong. WISKOBAS in methoden. OW & OC. Utrecht 1986.
2 H. ter Heege ontwikkelde een leerstoflijn over het gebruik van de zakrekenmachine in de bovenbouw van de basisschool. Zie: Mijn zakrekenmachineboek. SLO. Enschede, 1985. En: De zakrekenmachine in de bovenbouw van de basisschool. SLO. Enschede, 1985. J. van de Brink onderzocht een groot aantal mogelijkheden van het gebruik van de zakrekenmachine in de basisschool. Zie diverse publikaties in De Nieuwe Wiskrant en Willem Bartjens.
3 Op de PANAMA-conferentie van 1986 presenteerde A. Treffers een theorie over het leren en onderwijzen van wiskunde die zichtbaar maakt hoe realistisch reken- en wiskunde-onderwijs een bijdrage kan leveren tot het zinvol leren van wiskunde.
4 Ook in de opleiding tot leraar in de basisschool is de invloed van WISKOBAS aanzienlijk. F. Goffree heeft zich hiermee systematisch beziggehouden. Zie: F. Goffree. Leren onderwijzen met WISKOBAS. IOWO. Utrecht, 1979.
5 PANAMA staat voor PAbo NAscholing Mathematischa Aktiviteiten. PANAMA verzorgt allerlei nascholingsaktiviteiten voor PABO docenten, schoolbegeleiders, e.d. door middel van: de PANAMA-post, de PANAMA-conferentie, kursussen, ...
6 L. Streefland is met een uitgebreide studie bezig over de didaktiek van het onderwijs in verhoudingen en breuken. Zie diverse publikaties in De Nieuwe Wiskrant en Willem Bartjens.
7 J. Klep ontwikkelt een computerprogramma dat de rekenvaardigheid van basisschoolleerlingen kan ondersteunen. Zie publikaties in Willem Bartjens.
8 NVORWO staat voor: Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs. De vereniging behartigt vooral de belangen van PABO-docenten, schoolbegeleiders, onderzoekers en docenten van de basisschool. Het citaat komt uit de reaktie van de NVORWO op de richtlijnen van de SLO. In die richtlijnen wordt voorgesteld het basisschoolprojekt na 1 augustus 1987 niet verder te verlengen.

Verschenen

Alexanderson e.a., *The William Lowell Putnam Math. Competition*, The Math. Ass. of America, John Wiley, £ 22.00, 147 blz.
De opgavensets uit de jaren 1965-1984 van de genoemde wiskunde competitie voor universitaire studenten zijn samengebracht in deze bundel. Van elke opgave is tevens een uitwerking opgenomen. Een index, geordend op onderwerp sluit het boek af.

Lawler c.s., *The Traveling Salesman Problem*, John Wiley, £ 39.95, 465 blz.
Met als centraal thema het Handelsreizigersprobleem wordt in een 12-tal artikelen een overzicht gegeven van een aantal aspecten van combinatorische optimalisatie. De behandeling is beknopt maar veelomvattend. Als voorkennis wordt enige elementaire graphentheorie en lineair programmeren verondersteld.

M. Minoux, *Mathematical Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley, £ 34.95, 490 blz.
Doel van dit boek is een overzicht te geven van het gehele gebied van de mathematische optimalisering, zoals (niet-) lineair-, integer- en dynamisch programmeren, niet differentieerbare optimalisatie etc. Naast de benodigde theorie worden ook efficiënte algoritmen beschreven.
Deze uitgave bevat geen oefeningen of vraagstukken.

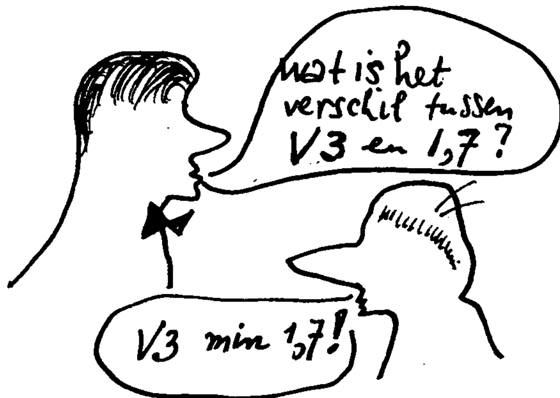
Kernighan/Pike, *De UNIX programmeeromgeving*, Academic Service, *f* 78.00, 329 blz.
Het boek richt zich in eerste instantie tot de (ervaren) programmeur die de beschikking heeft over een UNIX-systeem. In de eerste helft wordt het UNIX-systeem uit de doeken gedaan. Het tweede deel besteedt aandacht aan het ontwikkelen van programma's, waarbij kennis van de programmeertaal C wordt verondersteld.
Het boek is voorzien van een groot aantal oefeningen.

L. R. Mustoe, *Worked Examples in Engeneering Mathematics*, John Wiley, £ 4.95, 111 blz.
Een boekje bestaande uit 53 boeiende, uitgewerkte voorbeelden, verdeeld over: complexe getallen, vectoren, lineaire algebra, tekenen van krommen, (partieel-) differentiëren, integeren, differentiaalvergelijkingen, numerieke methoden en statistiek en kansrekening. Dit alles op een niveau dat voor leerlingen uit bovenbouw vwo en studenten hbo goed te volgen is.

Phillips, Cornelius, *Computational Numerical Methods*, Ellis Horwood, John Wiley, £ 39.50, 375 blz.
Een uitgebreide inleiding in de numerieke wiskunde, voorzien van opgaven en uitgewerkte voorbeelden. Inhoud: 1. inleiding; 2. niet-lineaire vergelijkingen; 3. lineaire simultane vergelijkingen; 4. approximatie van continue functies; 5. approximatie van numeriek gedefinieerde functies; 6. numerieke integratie; 7. gewone differentiaal vergelijkingen.
Het boek is goed door te werken zonder diepgaande wiskundevoorkennis. Oplossingen van vraagstukken zijn in een appendix toegevoegd.

Onoplosbaar, wat is dat?

Henk Mulder



De vergelijking $x^2 - x - 5 = 0$ heet oplosbaar met als positieve wortel: $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{21}$ of benaderd 2,791.
De vergelijking $x^3 - x - 5 = 0$ heet onoplosbaar met als benaderde wortel 1,904.
Het verschil lijkt niet bijster groot, mede gezien het feit dat geen sterveling weet wat $\sqrt{21}$ is. Het klinkt ras-wiskundigen wellicht wat hard in de oren, maar sinds rekenmachine en computer school en maatschappij zijn binnengetreden, is onze voorstelling bij het woord oplossen danig veranderd. Overigens Newton was zijn tijd al ver vooruit toen hij met zijn benaderingsmethoden de derdegraadsvergelijkingen te lijf ging en zo eigenlijk programma's ontwierp voor hedendaags rekengereedschap. Het verschil tussen 'oplosbare' en 'niet-oplosbare' vergelijkingen wordt dan niet meer dan het verschil tussen ouderwets handwerk en moderne machinale aanpak. Het zal overigens duidelijk zijn dat we in dit verband onder 'onoplosbaar' niet verstaan: er is geen reële wortel die aan de vergelijking kan voldoen. In deze overgangstijd hebben onze leerlingen het niet gemakkelijk: misschien moet een uitkomst 2 in de wiskundeles wel geschreven worden als $\frac{\pi\sqrt{3}}{e}$ en in de natuurkundeles als 2,002.
Het lijkt nuttig, nu de rekenmachine ook in de wiskundeles als onmisbaar instrument aanvaard is, machinaal verkregen uitkomsten als volwaardig te accepteren. Computer en rekenmachine zijn niet alleen hulpmiddelen geworden maar ze dreigen ons denkproces ingrijpend te veranderen. Vroeger ging er niets boven 'exact', maar nu blijken niet-exacte werkmethoden in staat om een voertuig op de seconde nauwkeurig een landing op Mars te laten uitvoeren, iets waar 'precieze' methoden niet toe in staat zijn.
Hoe het exacte níet functioneert en het benaderde wél, willen we toelichten aan een concreet voorbeeld, een ruimtevaartprobleem. Een berekening aan satellietbanen.

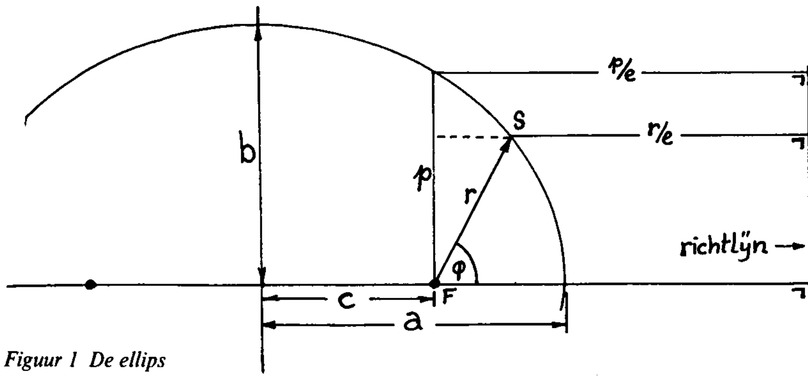
De ellips

Sinds Kepler weten we dat manen en planeten elliptische banen beschrijven om hun centrale hemellichaam. Even ter opfrissing, enige theorie betreffende ellipsen. De lange as van de ellips stellen we $2a$, de korte $2b$ en het lijnstuk, loodrecht op de lange as in het brandpunt, heeft de lengte p (fig. 1). Gezien het rotatiekarakter van satellietbanen is de ellipsvergelijking met cartesische coördinaten van weinig nut. Volgens de definitie van de ellips als verzameling van punten waarvoor de afstand tot de richtlijn steeds een bepaalde fractie is van die tot een brandpunt, vinden we een vergelijking in poolcoördinaten met een brandpunt als centrum:

$$r\cos\varphi + \frac{r}{e} = \frac{p}{e} \quad (e = \text{excentriciteit})$$

$$\text{of } r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \qquad (1)$$

Volgend uit de andere definitie: ellips als verzameling van punten waarvoor de som der afstanden tot twee vaste punten constant $2a$ is, vinden we gemak-



Figuur 1 De ellips

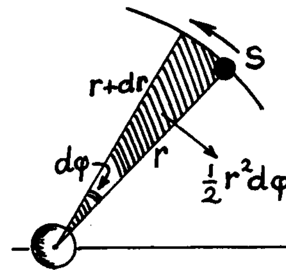
kelijk:

$$p = a(1 - e^2) \quad (2)$$
$$b = a\sqrt{(1 - e^2)} \quad (3)$$
$$e = \frac{c}{a} \quad (4)$$

Perkenwet van Kepler

Ons doel is een relatie te zoeken tussen radius r, hoek φ en de tijd t. Of eenvoudiger gezegd: waar bevindt zich de satelliet op het tijdstip t?
De perkenwet luidt: de door de voerstraal doorlopen oppervlakte in een zekere tijd t is evenredig met die tijd, (zie fig. 2)

of $dt = C_1(\frac{1}{2}r^2 \mathrm{d}\varphi)$ of $dt = C_2(r^2 \mathrm{d}\varphi)$



Figuur 2 Oppervlakte van een 'perk'

Als nulpunt voor de tijd stellen we het punt A van de baan dat zo dicht mogelijk bij het brandpunt (de positie van de aarde) ligt (fig. 3). We noemen dat punt het perihelium.
Integratie van (5) geeft, met gebruikmaking van (1):

$$t = C \int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2}$$

Pieter Miedema, astronoom en werkzaam op de wiskundige faculteit van de KMA te Breda heeft deze integraal 'gekraakt' en een analytische uitdrukking gevonden:

$$t = C(1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}\left\{2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\tfrac{1}{2}\varphi\right) - e\sqrt{(1 - e^2)}\frac{\sin\varphi}{1 + e\cos\varphi}\right\}$$

Wel, dat is dan een respectabel werkstuk en het loont de moeite deze uitkomst door differentiëren te controleren, om te zien of hij inderdaad succes heeft gehad. Een aardige sport voor een vrij kwartiertje. Anders, gelooft u mij, het klopt keurig.
Maar ... al bevredigt dit wiskundigen in hoge mate (immers het antwoord is exact juist) de ruimtevaart zit er niet om te springen. Immers we zoeken φ als functie van t en niet omgekeerd.

Een andere aanpak

In fig. 3 hebben we de omgeschreven cirkel van de ellips getrokken. S is de positie van de satelliet op

Figuur 3 Radius (r) en hoek (φ) als funktie van de tijd (t)

een zeker tijdstip t. Met die positie correspondeert punt Q op de cirkel.
Voor de coördinaten van S geldt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Voor de coördinaten van Q geldt:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Omdat de x-coördinaten van S en Q gelijk zijn, volgt hieruit: de y-coördinaten van S en Q verhouden zich als b/a. Of anders geschreven:

$$y_S = y_Q\sqrt{(1 - e^2)}$$

Hieruit volgt weer:

$$r \sin \varphi = a\sqrt{(1 - e)^2} \sin E \qquad (5)$$

We lezen in de tekening:

$$r \cos \varphi = FR = OR - OF = a \cos E - ae \qquad (6)$$

(5) en (6) kwadrateren en optellen geeft:

$$r = a(1 - e \cos E) \qquad (7)$$

(6) delen door (7)

$$\cos \varphi = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \qquad (8)$$

Hiermee hebben we dan relaties gevonden tussen r en de hoek E.
We willen nu een relatie zoeken tussen de tijd t en de hoek E.
Sektor FQ(boog)A

$$= \text{sektor } OQ(\text{boog})A - \text{driehoek } OFQ$$
$$= \tfrac{1}{2}a^2E - \tfrac{1}{2}a^2e \sin E = \tfrac{1}{2}a^2(E - e \sin E)$$

waaruit volgt:

$$\text{sektor } FS(\text{boog})A = \frac{b}{a} \cdot \tfrac{1}{2}a^2(E - e \sin E)$$
$$\tfrac{1}{2}ab(E - e \sin E)$$

Als de omloopstijd voor de elliptische baan T is, dan geldt volgens de perkenwet:

$$\frac{t}{T} = \frac{\text{sektor } FS(\text{boog})A}{\text{ellipsoppervlakte}} = \frac{\tfrac{1}{2}ab(E - e \sin E)}{\pi ab}$$
$$= \frac{E - e \sin E}{2\pi}$$

$$\text{of } t = \frac{T}{2\pi}(E - e \sin E) \qquad (9)$$

Volgens de derde wet van Kepler is de omloopstijd T direkt te bepalen uit de lengte van de lange as.
Voor aardse satellieten geldt:

$$T = \pi \cdot 10^{-7} \cdot a^{\frac{3}{2}} \qquad (10)$$

Werkwijze

Stel dat we nu bij een gegeven baan, de positie van de satelliet op zeker moment willen berekenen.
De ellips wordt gedefiniëerd door de waarden a en e. Daaruit volgt met (10) de omloopstijd T.
Vervolgens bepalen we bij keuze van een zeker tijdstip t, met (9) hoek E. Daarna kunnen we tenslotte met (7) en (8) de variabelen r en φ berekenen.
Het niet 'exacte' zit natuurlijk in de oplossing van (9).
Dat heet immers een 'niet oplosbare' vergelijking. Maar een geprogrammeerde benaderingsmethode volgens Newton geeft in een fractie van een seconde een aanzienlijk aantal decimalen. Dat lukt hier des

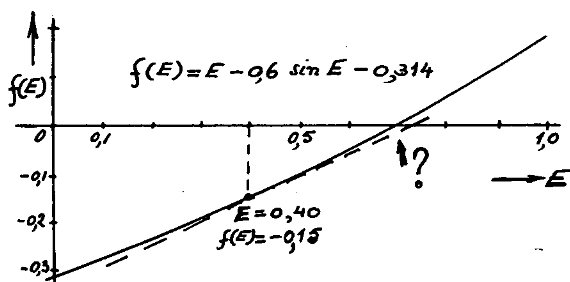
te gemakkelijker omdat $f(E)$ eenvoudig differentieerbaar is.
Het lijkt het beste om bedoelde werkwijze met een concreet voorbeeld toe te lichten.

Numerieke benadering

We nemen een baanellips met $e = 0{,}6$ (zoals in fig. 3).
We zoeken de positie van de satelliet ten tijde $t = 0{,}05T$, dus als 5% van de tijd verlopen is sinds het perihelium A gepasseerd is.
Met (9) vinden we dan:

$$E - 0{,}6 \sin E - 0{,}314 = 0$$

In fig. 4 is, ter illustratie van de werkwijze, de grafiek van $f(E)$ getekend in de buurt van het nulpunt. We kiezen een waarde voor E, bijvoorbeeld $E = 0{,}40$.



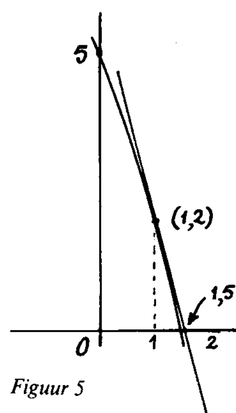
Figuur 4 Bepaling van het nulpunt (E = 0,702)
Eerste benadering: E = 0,73

We vinden door invullen dan $f(0{,}40) = -0{,}15$. Vervolgens bepalen we de raaklijn in dat punt en het snijpunt ervan met de horizontale as. We komen dan uit op $E = 0{,}73$. Dat is dan tevens onze eerste benadering van het nulpunt. Vervolgens berekenen we weer de waarde van $f(0{,}73)$ en zo verder. Het is niet moeilijk dit proces te programmeren. De benaderingsmethode werkt snel. We houden het eindresultaat op: $E = 0{,}702$.
Deze waarde in (7) ingevuld geeft: $r = 0{,}54\,a$ en in (8): $\cos \varphi = 0{,}302$ of $\varphi = 1{,}26$ radiaal of 72,4°. En hiermee is het probleem 'opgelost'.
Bij een goed opgezet computerprogramma kunnen, na invoeren van de gewenste tijd t, binnen een enkele seconde de waarden van r en φ afgelezen worden.

Opmerking
Kepler publiceerde zijn perkenwet in 1609 in zijn verhandeling 'Astronomia nova'. Hij baseerde zijn theorieën op de voor die tijd zeer nauwkeurige waarnemingen van Tycho Brahé betreffende de baan van de planeet Mars. Hij was een wegbereider voor Newton, die meer elementaire wetten formuleerde, waaruit in latere tijd de wetten van Kepler theoretisch konden worden afgeleid.

Hoe snel is Newton?

Om een idee te geven hoe snel de benaderingsmethode van Newton werkt, volgt hier een overzichtelijk voorbeeld.
Neem de vergelijking: $y = -x^2 - 2x + 5$.
Deze heeft als positieve wortel:
$-1 + \sqrt{6}$ of in acht cijfers:
$x = 1{,}4494897$
We zoeken dus het snijpunt van de grafiek met de positieve x-as.



Figuur 5

Voor $x = 1$ is $f(x)$ positief en voor $x = 2$ negatief. Het nulpunt ligt dus tussen 1 en 2.
Daarom kiezen we als eerste benadering $x_1 = 1$.
We vinden dan achtereenvolgens $f(1) = 2$ en $f'(1) = -4$.
De vergelijking van de raaklijn door (1, 2) wordt dan $y = -4x + 6$. Deze snijdt de x-as in $x_2 = 1{,}5$. Dat is dan de tweede benadering.
Volgen we dit proces nogmaals dan krijgen we $x_3 = 1{,}45$ en bij de volgende keer $x_4 = 1{,}4494896$, waarbij we dan meteen al zeven cijfers correct hebben. Er zit duidelijk vaart in de methode.

De stelling van Schroeder-Bernstein

E. H. F. Weijgers

We zeggen dat twee verzamelingen V en W hetzelfde kardinaalgetal hebben, als er een bijectie tussen bestaat. We schrijven: $\# V = \# W$. Ook noemen we V en W dan wel gelijkmachtig. Bij eindige verzamelingen is dit kardinaalgetal niets anders dan het aantal elementen. Bij oneindige verzamelingen is er iets bijzonders. Neem voor V de verzameling $\mathbb{N}$ en voor W de verzameling van de even natuurlijke getallen. Aan elk element $x \in V$ voegen we toe het element $2x \in W$. Dit is een bijectie. V is dus gelijkmachtig met een echt deel van zichzelf. Twee verzamelingen waarvan de één een echt deel van de ander is, kunnen dus hetzelfde kardinaalgetal hebben.
Vergelijk nu $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. Weer is $\mathbb{N}$ een echt deel van $\mathbb{R}$, maar $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ zijn niet gelijkmachtig. We zeggen in zo'n geval dat $\# \mathbb{R} > \# \mathbb{N}$. Nu slaat de angst me om het hart. Zou het mogelijk zijn twee verzamelingen V en W te vinden zo, dat

a V gelijkmachtig is met een echt deel van W
b W gelijkmachtig is met een echt deel van V
en desondanks
c V niet gelijkmachtig is met W?

Dan zou volgens onze afspraak $\# V > \# W$ en ook $\# W > \# V$. Dan was $>$ geen orderelatie en zou het niet verantwoord zijn hier van groter te spreken. Gelukkig is dit onmogelijk. Van de stelling die de onmogelijkheid hiervan beweert, zond Ir. E. H. F. Weijgers ons het volgende door hem fraai geredigeerde bewijs.

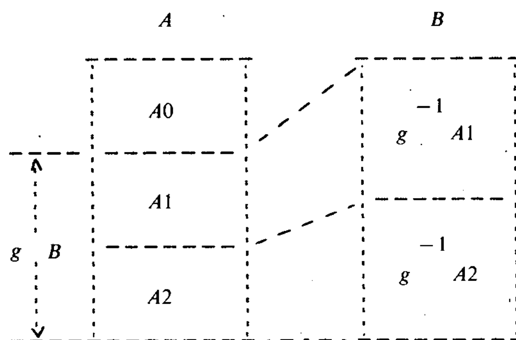
Als van twee verzamelingen elke gelijkmachtig is met een deel van de andere, dan zijn die twee verzamelingen gelijkmachtig.

Bewijs: Zij f een injectie van A in B,
en g een injectie van B in A.
Definieer een partitie van A:

$$A0 = A \backslash gB$$

$$A1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (g \circ f)^n A0$$

$$A2 = gB \backslash A1$$



Daar $A1 = (g \circ f)(A0 \cup A1)$, geldt dat $g^{-1}a1 = f(A0 \cup A1)$,
zodat $(f|A0 \cup A1) \cup (g^{-1}|A2)$ een bijectie van A op B is.

Van de auteur:
E. H. F. Weijgers is Delfts ingenieur. Na zijn afstuderen was hij eerst enige jaren bij het onderwijs werkzaam. Vijf jaar geleden heeft hij het onderwijs vaarwel gezegd. Bij zijn bedanken thans als lid van de NVvW zond hij de redactie van Euclides als afscheid deze bijdrage. De redactie schreef er een inleiding bij.

Ordening - structuur - houvast

Harrie Broekman

1 Vooraf

Als lerarenopleider zit ik vaak achter in de klas om lessen van a.s. leraren bij te wonen. Deze lessen leveren mij de hier gebruikte voorbeelden. Tevens maken die lessen – en de gesprekken daarover – het dilemma duidelijk waar ik als lerarenopleider/vakdidacticus mee zit. Als lerarenopleider moet ik de a.s. leraren helpen met hun startproblemen. Die startproblemen hebben veelal te maken met het omgaan met de leerlingen die veel aandacht nodig hebben. Hierbij dient een onderscheid gemaakt te worden tussen wat wel genoemd wordt negatieve aandacht (berispen, aan het werk zetten, etc.) en positieve aandacht (helpen met vragen over de leerstof).
Als vakdidacticus ben ik vooral geïnteresseerd in het verloop van de leerprocessen. Een gevolg daarvan is dat ik ook wil weten wat de rustig doorwerkende leerlingen precies doen. Hoe structureren die hun aanpak van problemen, hoe structureren die de leerstof-inhouden? Hoe spelen die een strategiespel?

2 Inleiding

Het artikel '*Wie ziet wat*' in Euclides (jan. 1986) bevatte mijn uitgangspunt:
wat er ook gebeurt, leerlingen structureren altijd, alleen niet altijd op dezelfde manier als de leraar.
In '*Structuur aanbrengen door leerlingen*' in Euclides (maart 1987) stelde ik de vraag:
hoe komt het dat veel van onze leerlingen zo weinig structuur aanbrengen in de aanpak van aan hen voorgelegde problemen?
Daarbij kwam vooral naar voren dat de *snelle-antwoord-gerichtheid* een negatieve invloed heeft op het structureren van de aanpak.
In dit artikel zal ik het 'structureren' verbreden door niet alleen te kijken naar inhoudelijk-structureren, maar ook het zoeken van houvast in de werksituatie een plaats te geven. Daarbij zal voornamelijk naar de leerlingen gekeken worden, alhoewel ook hier de leerstof (het boek) en de leraar niet buiten beeld kunnen blijven.

3 Structureren van leerstof-inhouden

Aan de hand van een voorval uit een brugklas wordt aangeduid wat onder structureren van leerstof-inhouden wordt verstaan. Het betreft een klas die Getal en Ruimte gebruikt. De leerlingen zijn zelfstandig aan het werk met het hoofdstuk machten, de opgaven 12 t/m 15.

11 Bereken
a. $(\frac{2}{3})^4$ b. $(\frac{3}{4})^2$ c. $(1\frac{1}{2})^3$ d. $(3\frac{3}{5})^2$

12 Spreek $(-2)^3$ uit als *min-twee-tussen-haakjes-tot-de-derde.*
Vul in:
a. $(-2)^3 = -2 \cdot -2 \cdot -2 = \ldots$
b. $(-3)^4 = \ldots \cdot \ldots \cdot \ldots \cdot \ldots = \ldots$

13 Bereken
a. $(-2)^5$ b. $(-18)^2$ c. $(-10)^5$ d. $(-1)^{26}$

14 Schrijf over en vul in:
a. $(-3)^2$ betekent ..., dus $(-3)^2 = \ldots$
b. $(-3)^3$ betekent ..., dus $(-3)^3 = \ldots$
c. $(-3)^4$ betekent ..., dus $(-3)^4 = \ldots$

15 Schrijf over en vul in:
a. -3^2 is het tegengestelde van 3^2, dus $-3^2 = \ldots$
b. -3^3 is het tegengestelde van $3^{\cdots}$, dus $-3^3 = \ldots$
c. -3^4 is het tegengestelde van ..., dus $-3^4 = \ldots$

C Let goed op het verschil in betekenis tussen $(-3)^4$ en -3^4.
$(-3)^4 = -3 \cdot -3 \cdot -3 \cdot -3 = 81$ *macht met grondtal* -3 *en exponent* 4
$-3^4 = -3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = -81$ *tegengestelde van de macht* 3^4

16 Bereken
a. 2^6 d. 3^4
b. $(-2)^6$ e. $(-3)^4$
c. -2^6 f. -3^4

Ik zit achterin de klas. De student, die de les verzorgt, rent op en neer tussen leerlingen die opgepord moeten worden ook eens wat te doen én de hulpvragende leerlingen. Een medestudent gaat in de schriften van een aantal doorwerkende leerlingen kijken; vermoedelijk om zijn nieuwsgierigheid

naar wat er in die schriften staat te bevredigen.
Die medestudent komt even later helemaal ondersteboven bij mij terug:
S. 'Weet je wat die leerlingen aan het doen zijn?'
H. Sommen aan het maken zo te zien.
S. 'Ja, maar weet je hoe die leerling -3^4 uitrekent?'
H. Nee.
S. 'Nou, $3 \times 3 = 9 \times 3 = 27 \times 3 = 81$'
h. Nou en?
S. 'En hij heeft net daarvoor uitgerekend 3^3 is 27. Dan neem je bij 3^4 toch gewoon nog weer één keer verder vermenigvuldigen! Die begint weer gewoon opnieuw. Die volgende som is gewoon een nieuwe som'.
De student-leraar constateert hier het feit dat de betreffende leerlingen geen structuur aanbrengen en/of herkennen in de leerstof-inhoud.
Dit lijkt in tegenspraak met hetgeen in 'Wie ziet wat?' beschreven werd. Toch waren ook de daar gegeven voorbeelden uit de klassepraktijk afkomstig. Het waren allemaal voorbeelden waarbij leerlingen op het moment dat ze éven iets zagen, begonnen te roepen '*hé, wacht even, is het dan niet zo dat...*'. In al die gevallen waren er leerlingen die zochten naar een regelmaat, een verband, een onderliggend principe. Het waren echter wel allemaal voorbeelden uit een klassikale situatie waar een paar leerlingen reageerden, en beslist niet alle leerlingen. Misschien is die leerling die hier 3^4 opnieuw ging uitrekenen door te beginnen met 3×3 terwijl hij net daarvoor 3^3 uitgerekend had, wel niet de leerling die ook in de klassediscussie mee deed met het zoeken naar een verband.
Ben ik te optimistisch geweest toen ik schreef 'iedereen zoekt een zekere ordening, een verband, een structuur?'
Een zeer essentiële vraag, die n.a.v. het voorgaande voorbeeld gesteld zou kunnen worden, is: zoekt die betreffende leerling structuur in de opgaven, het wiskundige materiaal? Of zoekt die leerling houvast in een veilige werksituatie, gewoon sommetje na sommetje maken?
In het artikel 'Wie ziet wat?' stelde ik dat *wat er ook gebeurt, leerlingen structureren altijd, alleen niet altijd op dezelfde manier als de leraar.* Met behulp van de daar gegeven voorbeelden heb ik willen aanduiden dat de leerlingen niet altijd uit een gegeven probleem(situatie) de essentiële punten en/of verbanden halen. Maar in al die gevallen werd er wel iéts gevonden. En er werd kennelijk ook naar gezocht. Dat deed de leerling, die met 3^4 opnieuw aan de gang ging kennelijk niet. Misschien zocht hij niet, omdat er een veilige situatie, een veilige aanpak was waarmee hij bij het sommetje -3^4 tot een goed antwoord kon komen?

4 Een strategie-spel

Om verder te verduidelijken wat bedoeld wordt met het zoeken van houvast in de werksituatie i.p.v. het zoeken van ordening en structuur in de (leerstof)inhouden wil ik iets vertellen over het verloop van een spelsituatie.
Het betreft het volgende spel.

X						O
X						O

Speler A heeft fiches X, speler B de fiches O. Een speler, die aan de beurt is, mag één van zijn fiches vooruit of achteruit schuiven. Het aantal hokjes mag hij zelf kiezen.
Springen is niet toegestaan; het overschrijden van de dubbele lijn (veranderen van baan) ook niet. Twee fiches op één hok mag niet. Een speler moet schuiven als hij aan de beurt is. Verliezer is de speler die geen fiche meer kan verplaatsen (teruggedrongen is naar z'n uitgangspositie).

Enige tijd geleden werd dit spel door een van mijn studenten (Dick Vlot) in een brugklas havo/vwo geïntroduceerd.
Dick speelde een demonstratie-partij tegen een van zijn leerlingen uit de klas. Hij had zich voorgenomen om te verliezen. Dan zou hij zeggen: 'en nu denken jullie natuurlijk dat je van me kunt winnen. Maar ik ken een manier, een strategie, waardoor ik altijd kan winnen. Kom maar op. Wie durft?'
Hij vergat dat hij wilde verliezen en won. Desondanks wilden vrijwel alle leerlingen wel tegen hem spelen.
Dick: 'Ik kan niet tegen iedereen tegelijk spelen. Weet je wat, gaan jullie eerst maar eens in tweetal-

len oefenen. Probeer maar een goede manier van spelen te vinden om van mij te winnen'.
De bedoeling is duidelijk. Via een uitdaging wil hij de leerlingen een winnende strategie laten zoeken. Ik ben bij een tweetal leerlingen gaan kijken, om te zien hoe ze het aanpakten. Op een gegeven moment hadden ze het spel zo'n 25 keer gespeeld. Schuiven, schuiven,... boem, Jantje gewonnen. Schuiven, schuiven,... vast. Philip gewonnen. Enzovoort.

H: Wat zijn jullie aan het doen?
Lln: Het spel aan het spelen.
H: Hebben jullie al een winnende manier van spelen ontdekt?
Lln: Ja hoor; het is een leuk spel!
H: Zou je nu ook kunnen winnen als je tegen Dick ging spelen?
Lln: Nee, want hij weet natuurlijk hoe het moet.
H: Zouden jullie er ook achter kunnen komen hoe het moet?
Jan: Ja, misschien wel.
Philip: Kom op man, jij moet weer. [En tegen mij] Zit niet te zeuren, we zitten gewoon lekker een spelletje te doen!

Er is hier iets aan de hand dat vergelijkbaar is met het voorval met de machten van drie. Je hebt een som, en die maak je. Een spel, dat speel je. Dan een volgende som, en die maak je. Een volgend spel, dat speel je. Etc. Waarom zul je bij een som (spel) naar een vorige kijken? Je gaat gewoon door, en dat werkt. Dus: waar maak je je druk over?
Misschien keek en luisterde ik niet bij de juiste leerlingen? Of zit het in het soort opgaven dat de leerlingen voorgeschoteld krijgen? Of de manier waarop de opgaven, het spel, door de leraar gepresenteerd worden?

5 Andere opgaven?

Een suggestie die uit het voorgaande naar voren kan komen is dat de leerstof, en de wijze waarop deze in het leerboek aangeboden wordt, mee bepaalt of de leerlingen naar een structuur gaan zoeken. Om dat na te gaan wil ik het volgende voorval nader onder de loep nemen.
In een 3 vwo-klas wordt gewerkt aan 'vergelijkingen met twee variabelen'. (Moderne Wiskunde 6HV, 4e editie).
De leerlingen zijn individueel aan het werk met de nevenstaande tekst.

Ik zit achterin de klas, naast twee meisjes die tot de rustig-doorwerkende leerlingen gerekend worden. De lesgever heeft gezegd dat het hoofdstuk geen nadere introductie nodig had en dat zij aan het werk konden gaan. De leerlingen beginnen met opgave 1a.
Het ene meisje (Anja) schrijft in haar schrift $x + y$. Haar buurvrouw (Christine) schrijft ook $x + y$ en zegt dan 'oh jé, is dat wel een formule?'
Op dat moment komt de leraar langs en zegt 'het moet wel een formule zijn hoor'.

Christine: Wat bedoelt u dan?
Leraar : Nou, zoiets als, eh... Je zou kunnen zeggen d van distance; dat wordt wel eens gebruikt.
Anja : Mag a voor afstand ook? Of iets dergelijks?
Leraar : Ja hoor.

Anja schreef vervolgens $a = x + y$ en Christine $x + y = a$. Of dat hetzelfde was werd niet besproken; ze gingen door naar vraag b. Christine schreef direct op $x + y = 60$.

Anja : Nee joh, dat is 15.
Christine: Hoe kom je daar nu bij?
Anja : Nou gewoon, je moet 60 : 4 nemen.
Christine: Oh ja. Ze zet een vier onder de zestig ($\frac{60}{4}$).

Naar vraag c zaten ze een beetje vreemd te kijken. 'Wat moet je daar nu mee?' Toen keken ze naar het plaatje.

Christine: ja, natuurlijk $x - y$.
Anja : nee, $y - x$
Christine: nee, die x is de dikste pijl, dus dat is de grootste, dus het is $x - y$.

Mijn gedachte was dat ze in ieder geval bezig waren en er wel een moment zou komen waarop ze in conflict zouden komen. Wie weet moesten ze dan gaan 'nadenken'. Op naar vraag d.

Christine: $x - y = ...$ Ja, hoe moet ik dat nou doen; ik weet alleen maar $x + y$.

Ha fijn, dacht ik, die denkt tenminste terug, en gaat niet van sommetje naar sommetje.

Anja : Nee, je moet 60 nu natuurlijk door 5 delen en dat is 12.

En dat werd door beiden opgeschreven.

vergelijkingen met twee variabelen

1 Marijke maakt met haar ouders een boottocht over de IJssel. Zij varen van Brummen naar Zwolle (stroomafwaarts) en later terug van Zwolle naar Brummen. Marijke probeert na te gaan hoe snel de boot vaart. De snelheid die de boot in stilstaand water zou kunnen varen, noemt ze x km/uur en de stroomsnelheid van het IJsselwater y km/uur.

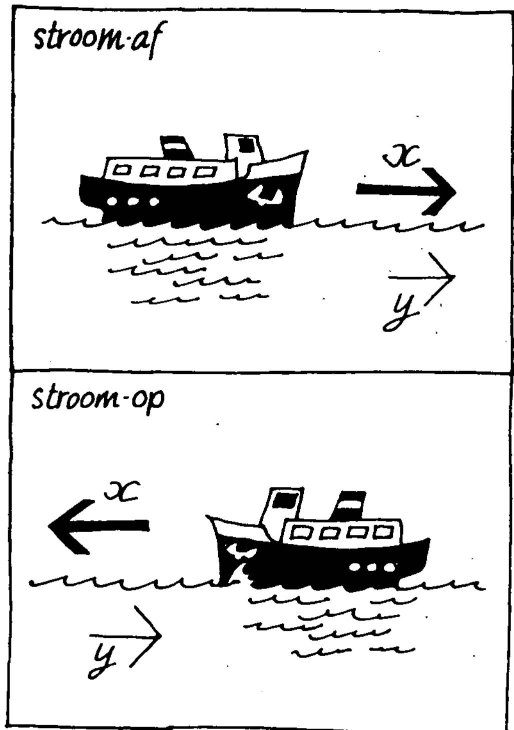
a Geef een formule voor de afstand die zij in één uur afleggen op de heenreis.

b De boot doet over de heenreis vier uur. De afstand Brummen-Zwolle bedraagt over water 60 km.
Vul het juiste getal in: $x + y = ...$

c Geef een formule voor de afstand die zij in één uur afleggen op de terugreis.

d De terugreis duurt vijf uur. Vul in: $x - y = ...$

e Nu Marijke de vergelijkingen $x + y = 15$ en $x - y = 12$ heeft gevonden, kan zij de vaarsnelheid van de boot berekenen. Hoe groot is deze vaarsnelheid? Hoe groot is de stroomsnelheid van het water in de IJssel?



Hiernaast staat een voorbeeld van een <u>stelsel</u> van twee vergelijkingen met twee variabelen. De <u>oplossing van dit stelsel</u> is het getallenpaar ($13\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$).
In dit hoofdstuk wordt bekeken hoe je stelsels oplost.

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x - y = 12 \end{cases}$$
"Stelsel"

Op naar vraag e. 'Nu Marijke de vergelijkingen $x + y = 15$ en $x - y = 12$ heeft gevonden kan ze de vaarsnelheid berekenen...'.
Anja kijkt er naar en zegt: 12 en 3. Zo, dat was som 1.

Christine: Verrek, hoe kom je aan die 12 en 3?
Anja : Nou, kijk maar, $12 + 3 = 15$ en $12 - 3 = 12$. Oh jèh, dat klopt niet. Nou ja, zoiets dan.

En ze gingen gewoon verder!

6 Wat is er aan de hand?

De leerlingen hebben een aantal opgaven te maken die duidelijk zo geordend zijn dat er iets ontdekt 'moet' worden. Maar het gebeurt niet. De uitdaging ontbreekt; de behoefte om te onderzoeken, te vergelijken en misschien ook het vermogen om door de buitenlaag van de opgaafjes heen te kijken (het zijn uiteindelijk de opgaven 1a, 1b, 1c, etc.).

Wat je ziet gebeuren is dat een aantal leerlingen, bewust of onbewust, kiest voor de veilige structuur van 'op naar de volgende vraag'.
Dat dit 'gewoon verder gaan' vaak veilig is, komt omdat ze 'er toch wel uitkomen' zonder iets te pakken van de bedoeling van de auteurs.
Ook als er wel een uitdaging is, zijn er leerlingen die die uitdaging niet oppakken en op safe spelen. Ze doen dit door toe te werken naar hetgeen de leraar lijkt (blijkt?) te willen, nl. het goede antwoord.
Mede door dit sterke gericht zijn op de 'antwoorden op iedere vraag afzonderlijk' en het 'op safe spelen' missen veel leerlingen de impliciete boodschap die in een aantal 'geordende' opgaven zit. Ze zoeken niet naar structuur in de leerstof-inhoud, maar in de werk-situatie. Ze zoeken niet naar de bedoelingen van een aantal opgaven, maar naar hetgeen ze denken dat de leraar wil, namelijk goede antwoorden. Die goede antwoorden willen ze zelf ook, en terecht. De auteurs van het boek willen echter meer. Ze willen dat de leerlingen, al werkend, zoeken naar de bedoelingen van de opgaven. De theorie die in de sommen verborgen zit.

7 Moet je ze als leraar dan maar laten aanmodderen?

Het gebruik van het woord aanmodderen geeft al aan dat het zonder meer laten doorwerken niet verstandig is. Zeker bij opgaven van de in 5 besproken soort zal een gesprek nodig zijn waarbij de essentie van de opgave er uitgelicht wordt. Het is uiteraard ook mogelijk dat de auteurs de opgave veranderen, zo dat de leerlingen meer gericht worden op de essentie.
Onderzoek lijkt er echter op te wijzen dat alleen het veranderen van de opgave niet voldoende is.
Bij Van Parreren kunnen we hierover o.a. het volgende lezen:
Juist door het zelf laten oplossen van opgaven die zouden moeten leiden tot het vormen van begrippen, blijkt het kind niet verder dan tot globale, algemene voorstellingen te komen. Het blijft in de aanschouwing steken en komt niet tot systematische abstractie van kenmerken. De vorming van principieel nieuwe begrippen, die het jonge schoolkind moeten verwerven, moet onder leiding van, in samenwerking met volwassenen, gebeuren.

Zoals uit het voorbeeld van de machten van drie en het voorbeeld van de vergelijkingen met twee variabelen blijkt vindt er kennelijk lang niet altijd een confrontatie plaats. De situaties die wij uitzoeken als zijnde karakteristiek, moeten ook zo'n uitdagend aspect hebben, dát een leerling zich er in gaat verdiepen. Die situaties moeten in zich hebben dat een leerling zich er in gaat verdiepen.
Van Dormolen spreekt in dat kader over duidelijke 'probleemsituaties' en ook over 'voorbeelden en non-voorbeelden'. In sommige leerstofpakketjes van de SLO probeert men het door een aantal meningen tegenover elkaar te zetten en de leerlingen daaruit te laten kiezen. Het voorbeeld van pag. 209 komt uit experimenteel SLO-materiaal.

Een andere mogelijkheid is het benutten van instapproblemen, het gebruiken van (strategie-)spelen en het zelf laten aangeven van wat de essentie is van bepaalde stukjes leerstof. Het gebruik maken van visualiseringen en modellen wordt eveneens aanbevolen.
Voorbeelden hiervan zullen in volgende artikelen aan bod komen.

Concluderend

In het voorgaande heb ik mijn uitgangspunt 'wat er ook gebeurt, leerlingen structureren altijd, alleen niet altijd op dezelfde manier als de leraar' verder uitgewerkt door naast het inhoudelijk-structureren ook het zoeken van houvast in de werksituatie (veiligheid zoeken) een plaats te geven. Het lijkt er op dat dit laatste voor veel leerlingen belangrijker is dan het inhoudelijk structureren en het in Euclides 62, 6, maart 1987 besproken structureren van de aanpak van een probleem (opgave).
Zeker de leerling, die niet de neiging heeft om uit zichzelf structuur aan te brengen in de leerstofinhouden, zal de hulp nodig hebben van het leermateriaal, de leraar en de medeleerlingen om beter te gaan structureren.
Er zijn in het voorgaande reeds enkele suggesties gedaan voor mogelijkheden die leerboekauteurs en leraren hebben om hier aan te werken.
Wel dienen we daarbij te beseffen dat het leerboek alleen het niet kan (ook niet de IOWO, OW&OC, of SLO-pakketjes). Voor heel veel leerlingen is de

HET VAASJE



Een antiekhandelaar kocht een vaasje voor ƒ 7,=. Hij verkocht het daarna voor ƒ 8,= en kocht het later weer terug voor ƒ 9,=. Daarna verkocht hij hetzelfde vaasje weer voor ƒ 10,=. Winst ?? Hoeveel ?

- Verdient de antiekhandelaar 0, 1, of 2 gulden ?
- Beredeneer waarom je dat vindt:

- Bekijk de volgende redeneringen eens goed:

A Nadat hij het vaasje heeft gekocht voor ƒ 7,= en verkocht voor ƒ 8,= heeft hij 1 gld. winst gemaakt. Door het vaasje voor ƒ 9,= terug te kopen na het voor ƒ 8,= te hebben verkocht, verliest hij 1 gld. Op dat moment speelt hij dus gelijk. Maar dan wint hij weer 1 gld. door voor ƒ 10,= te verkopen wat hij voor ƒ 9,= gekocht had. Totale winst dus ƒ 1,= .

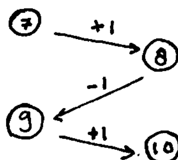
B De uitgaven van de handelaar zijn 7+9=16 en de inkomsten 8+10=18 , winst dus 18-16=2

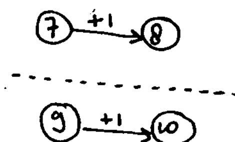
C Toen hij het vaasje voor ƒ 8,= verkocht, maakte hij ƒ 1,= winst. Maar dan verliest hij ƒ 2,= door het vaasje voor ƒ 9,= terug te kopen terwijl hij daar maar ƒ 7,= voor betaald had. Nu verliest hij in totaal ƒ 1,= , maar die verdient hij op het laatst terug door ƒ 10,= te vangen terwijl hij juist ƒ 9,= betaald had. Hij wint of verliest dus niets.

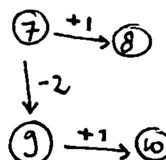
D Stel dat de handelaar ƒ 100,= in kas had. Dan wordt het eerst ƒ 93,= dan ƒ 8,= erbij wordt ƒ 101,=. Dan koopt hij het vaasje terug voor ƒ 9,= in kas: ƒ 92,= Tenslotte verdient hij ƒ 10,= dus in kas ƒ 102,= Twee gulden verdiend.

- Op welke redenering lijkt die van jou 't meest ?
- Welke redeneringen zijn volgens jullie fout ?

- Welk schemaatje hoort bij welke redenering ?







- Maakt het voor de winst wat uit dat het steeds over het zelfde vaasje gaat ?

- Kun je nu de fouten in de redeneringen aanwijzen ?

Uit: *SLO materiaal van Jos ter Pelle*

leraar nodig om ze te helpen de uitdaging te aanvaarden, of om ze de juiste vragen te stellen om verder te komen. Dit is veelal noodzakelijk om een leerling te helpen net even dieper in de leerstofinhoud te duiken, of om een leerling bij wijze van spreken boven een opgave uit te tillen.
Belangrijk is hierbij het uitgangspunt – door Bram Lagerwerf beschreven in Euclides (feb. 1986) – dat uitdaging pas gedijt bij voldoende houvast en veiligheid.

Literatuur

W. J. Bos; *'Gebruik je hersens!'* Euclides 60, 7, mrt. 1985.
H. Broekman; *Leerstijlaspecten. Wie ziet wát?* Euclides 61, 5, jan. 1986.
H. Broekman; *Structuur aanbrengen door leerlingen.* Euclides 62, 6, maart 1987.
H. Broekman; *Spelen in het wiskunde-onderwijs.* Nieuwe Wiskrant 6, 1, okt. 1986.
J. van Dormolen; *Didactiek van de wiskunde.* Dordrecht, Bohn, Scheltema & Holkema.
J. van Dormolen; *Aandachtspunten.* Bohn, Scheltema & Holkema, 1982.
F. Goffree; *Modelmatig denken in Wiskunde en Didactiek deel 1.* Groningen, 1982.
M. van Hiele; *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education.* Academic Press. Inc. 1986.
B. Lagerwerf; *Uitdaging.* Euclides 61, 6, feb. 1986.
B. Lagerwerf; *Niveau's van zekerheid.* Nieuwe Wiskrant, jrg. 3 en 4.
C. F. van Parreren; *De relatie onderwijs-cognitieve ontwikkeling in de Russische psychologie,* in Psychologen over het kind deel 3 (red. J. de Wit), pag. 105, Groningen 1973.

Boekbesprekingen

Chao c.s., *Probability Theory and Harmonic Analysis, Dekker,* prijs $ 71,50

Een drietal punten zullen we doorlopen.
Wie? Het boek is een bundeling van een vijftiental wetenschappelijke artikelen geschreven door een nog groter aantal auteurs.
Wat? Het gaat zoals de titel al aangeeft over waarschijnlijkheidsrekening en harmonische analyse, onderwerpen zijn (voor het gemak maar niet vertaald): martingales, stochastic integrals, diffusion processes on manifolds, random Fourier series, harmonic functions, random walks on graphs, singular integral operators, invariant differential and degenerate elliptic operators.
Voor wie? Het boek beoogt een overzicht van het vakgebied te geven samen met nieuwe resultaten. De lezer wordt direct in het diepe gegooid: de notatie van dit sterk geformaliseerde vakgebied wordt bekend verondersteld. Verder heeft de lezer een flink stuk basiskennis op wetenschappelijk niveau nodig.

Klaas Poortema

W. T. van Horssen, A. H. P. van der Burgh, *Inleiding matrix rekening en lineaire optimalisering,* Epsilon Uitgaven, Utrecht, 111 pag., *f* 19,50.

Dit is de tweede uitgave van genoemde uitgeverij. Epsilon Uitgaven Utrecht stelt zich ten doel goede, Nederlandstalige studieboeken op het terrein van de exacte vakken tot stand te brengen. Met het bovenvermelde boekje is men zeker in de opzet geslaagd.
Na twee inleidende hoofdstukken over het rekenen met matrices en het oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen wordt in hoofdstuk 3 de Simplex Methode voor Lineair Programmeren afgeleid. Dit hoofdstuk beslaat ruim de helft van het boek en wordt afgesloten met een praktijkvoorbeeld.
Naast een aantal uitgewerkte voorbeelden zijn er voldoende opgaven opgenomen, zodat een waardevol leerboek is ontstaan. Enkele opmerkingen betreffende computerimplementaties van de Simplex Methode zouden het boek nog interessanter hebben gemaakt.

Harm Bakker

De Leesportefeuille

F. M. W. Doove

De Leesportefeuille stelt docenten, die lid zijn van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, in de gelegenheid om kennis te nemen van tijdschriften op het gebied van de wiskunde, informatika en de didaktiek van de wiskunde en informatika.

In 1987 worden de volgende tijdschriften in roulatie gebracht:

a Elemente der Mathematik
Zwitsers tijdschrift. Overwegend Duitstalig. Verschijnt 6 × per jaar. Het bevat artikelen over elementaire wiskunde vanuit een hoger standpunt. Nauwelijks direct in het onderwijs toepasbaar. Interessant voor wie zich voor klassieke onderwerpen interesseert. Geen didaktiek. Vraagstukkenrubriek. Veel boekbesprekingen, in hoofdzaak van boeken op universitair niveau.

b The Mathematical Gazette
Engels tijdschrift. Verschijnt 4 × per jaar. Bevat vooral korte artikelen over elementaire, wiskundige onderwerpen. Toch is het niveau van de onderwerpen meestal nog te hoog voor hoogste klas vwo. Vraagstukkenrubriek. Veel recenties, ook van Engelse schoolboeken.

c The Mathematics Teacher
Amerikaans tijdschrift, Verschijnt 9 × per jaar. Bevat in hoofdzaak praktisch getinte artikelen. Ook regelmatig aandacht voor illustratief gebruik van de computer in het wiskunde-onderwijs. Niet alleen gericht op bovenbouw. Wat meer toegankelijk en aansluitend bij de dagelijkse praktijk. Recenties van Amerikaanse schoolboeken en ook van software voor het voortgezet onderwijs.

f Mathematische Semesterberichte
Duits tijdschrift. Verschijnt 2 × per jaar. Bevat vaak langere artikelen. Vooral wiskundig gericht, bedoeld om de docent te inspireren. Onderwerpen sluiten vaak wel aan bij onderwijs in bovenbouw vwo, maar moeten wel 'vertaald' worden. Geen vraagstukken en nauwelijks boekbesprekingen.

h Wiskunde en Onderwijs
Belgisch tijdschrift. Verschijnt 4 × per jaar. Nederlandstalig. Bevat veel artikelen over schoolwiskunde, maar uiteraard voor het Belgisch voortgezet onderwijs. Ook lezingen van studiedagen. Veel artikelen wel interessant, maar vaak over geheel andere onderwerpen dan in het Nederlandse wiskunde-onderwijs aan de orde zijn.

i Mededelingen van het Wiskundig Genootschap
Nederlands tijdschrift. Verschijnt 9 × per jaar. Bevat geen artikelen, maar alleen universitaire mededelingen. Zeer veel boekbesprekingen, maar niet van schoolboeken.

j Nieuw Archief voor Wiskunde
Nederlands tijdschrift. Verschijnt 3 × per jaar. Uitgegeven door het Wiskundig Genootschap. Engelstalig. Bevat vooral artikelen op het gebied van de universitaire wiskunde. Geen didaktiek. Alleen voor de docent. Geen directe toepasbaarheid voor het onderwijs.

k Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathematique
Frans tijdschrift. Verschijnt 4 × per jaar. Uitgegeven door de Franse Vereniging van Wiskundeleraren. Bevat algemene artikelen, soms ook direct toepasbare. Beperkte rubriek boekbesprekingen.

l Praxis der Mathematik
Duits tijdschrift. Verschijnt 8 × per jaar. Bevat langere artikelen over wiskunde, die toepasbaar gemaakt moet worden voor bovenbouw. Dikwijls exacter en abstracter dan in Nederland de gewoonte is. Bevat de laatste tijd een aparte katern over computers in school.
Boekbesprekingen van Duitse schoolboeken en boeken die bedoeld zijn voor universitair onderwijs, maar niet te specialistisch zijn. Vraagstukkenrubriek.

m Educational Studies in Mathematics
Nederlands tijdschrift. Verschijnt 4 × per jaar. Engelstalig. Internationaal georiënteerd. Bevat algemene artikelen over de didaktiek van de wiskunde. Ook over het elementair wiskunde-onderwijs. Geen puur wiskundige artikelen. Ook belangrijk voor docenten aan Pedagogische Akademies.

n Didaktik der Mathematik
Duits tijdschrift. Verschijnt 4 × per jaar. Bevat vooral wiskundige artikelen. De onderwerpen zijn toepasbaar in de bovenbouw van het vwo, maar zijn in hoofdzaak bedoeld om de docent te inspireren en moeten dus worden 'vertaald'. Geen vraagstukkenrubriek en weinig boekbesprekingen.

o Mathematics in School
Engels tijdschrift. Verschijnt 5 maal per jaar. Het is een moderner tijdschrift over de didaktiek van de wiskunde.

p Mathematics Teaching
Engels tijdschrift. Verschijnt 4 maal per jaar. Ook dit is een wat moderner tijdschrift voor de didaktiek van de wiskunde.

q The American Mathematical Monthly
Amerikaans tijdschrift. Verschijnt 12 maal per jaar. Toonaangevend. Het bevat vooral wiskundige artikelen op het eerstegraadsgebied.

r The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching
Amerikaans tijdschrift. Verschijnt 4 keer per jaar. Het bevat practische en beschouwende artikelen en besprekingen van literatuur en software. Het is niet merkgebonden en bevat geen listings.

s The Computing Teacher
Amerikaans tijdschrift. Verschijnt 9 keer per jaar. Het is practisch gericht en bevat zowel beschouwende als technische artikelen. Het is niet merkgebonden en bevat geen listings.

De werking van de leesportefeuille:
Elke lezer mag een aflevering een week houden. Daarna moet het tijdschrift door de lezer worden doorgestuurd naar de volgende lezer.
Een lijst van lezers wordt bij het tijdschrift gevoegd.
De portokosten zijn voor rekening van de lezer.

Het leesgeld:
In 1987 bedraagt het leesgeld *f* 5,– per jaar, per tijdschrift. Het leesgeld voor dure tijdschriften is echter *f* 10,– per abonnement per jaar. In 1987 geldt dit hoge tarief voor de tijdschriften 'The Mathematics Teacher' en 'The American Mathematical Monthly'.

Aanmelden:
Collectieve deelname is niet mogelijk. De leesportefeuille richt zich uitsluitend op individuele lezers.

U kunt zich aanmelden als deelnemer aan de Leesportefeuille door het verschuldigde leesgeld over te maken op giro 1 60 99 94 ten name van:
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Leesportefeuille
Severij 5
3155 BR Maasland

Het vermelden van de letters waarmee de tijdschriften zijn aangegeven is voldoende.
Het leesgeld bedraagt dus *f* 5,– per abonnement, per jaar, maar c en q zijn *f* 10,–.
U moet er rekening mee houden dat het geruime tijd kan duren voordat de eerste tijdschriften komen. Sommige tijdschriften hebben veel lezers en zijn daardoor lang onderweg.

Opmerkingen:
De kosten zijn in feite aanzienlijk hoger dan het leesgeld doet vermoeden. Elke lezer moet namelijk de portokosten betalen voor doorzending aan de volgende lezer.
In de praktijk moet u rekenen op *f* 15,– tot *f* 25,– portokosten per tijdschrift per jaar. De kosten voor de leesportefeuille zijn als beroepskosten aftrekbaar.
Wie de tijdschriften i en j allebei wil lezen, kan, gezien de portokosten, overwegen lid te worden van het Wiskundig Genootschap. Beide tijdschriften zijn namelijk bij het lidmaatschap inbegrepen. (adres: Budapestlaan 6, Postbus 80010, 3508 TA Utrecht; lidmaatschap voor 1987: *f* 55,–).

Veranderingen in het wiskundeonderwijs

P. G. J. Vredenduin

Met veel genoegen heb ik op de jaarvergadering van de NVvW geluisterd naar de ontboezemingen van Anne van Streun. Zijn bijdrage 'A bas Euclide! Weg met de verzamelingen...' (ook afgedrukt in Euclides nr. 00 van deze jaargang, blz. 000-000) had ik te voren al gelezen. Ik had maar één bedenking: als men werk uit 1968 wil beoordelen met een bril op van 1986, dan krijgt men uiteraard een gecommuteerd beeld. Dit was voor mij aanleiding hem een uitvoerige brief te schrijven met wat achtergrondinformatie. Jan Sloff kreeg deze brief in handen en vroeg me hierover iets in Euclides te schrijven. Volgens hem begrijpen veel jongere leraren niet meer wat er in 1968 gebeurd is en zijn ze erg verbaasd dat een dergelijk programma tot stand kon komen.
Ik heb enige weerstanden moeten overwinnen, omdat ik niet de schijn wilde wekken als verdediger van het programma 1968 of van de CMLW op te treden. Ik heb geprobeerd als verslaggever zo objectief mogelijk te zijn. Anderzijds is het geen bloedloos artikel, maar geef ik wel degelijk mijn eigen mening en interpretaties.

Een stukje historie

In 1921 heb ik als leerling voor het eerst kennisgemaakt met wiskundeonderwijs. Ik heb ondervonden dat tot 1961, het jaar waarin de CMLW tot stand kwam, vernieuwing van dit onderwijs een continu proces was. Voortdurend, soms nauwelijks merkbaar, werd het onderwijs methodisch en ook wel inhoudelijk bijgesteld. Grote schokken bleven uit. Zo ziet men dat aan het functiebegrip steeds meer aandacht besteed wordt. In 1921 hadden de grafieken nog maar nauwelijks een plaats in het onderwijs gekregen. Heel langzamerhand werd enige aandacht besteed aan differentiaalrekening en later ook aan integraalrekening. En in 1958 werd infinitesimaalrekening een officieel onderdeel van het eindexamenprogramma. Het Wimecos-programma in 1958 was de meest ingrijpende wijziging, maar in wezen bestond deze uit sanering van de leerstof en hergroepering van de vakken over gymnasium en hbs.
Bovendien was wijzigen van leerstof nog een strikt nationale bezigheid. Van invloeden van buiten onze grenzen was geen sprake. Omstreeks 1960 kwam daar verandering in. Voordat ik daarop inga, wil ik echter een summier inzicht geven in het klimaat van ons onderwijs in de late vijftiger jaren.

Het klimaat rond 1960

Eind 1957 werd de (eerste) nomenclatuurcommissie ingesteld. Het rapport van deze commissie vindt men in Euclides 35 (1959-60), nr. 2, blz. 49-78 en nr. 6, blz. 187-189. Wie dit nog eens inkijkt, zal met verbazing zien dat men zich toen verdiepte in allerlei zaken die men tegenwoordig vanzelfsprekend acht en dat dit blijkbaar noodzakelijk was. Ik licht er enkele passages uit.

> De term functie wordt in twee verschillende betekenissen gebruikt. Men noemt $x + 5$ een functie van x en men zegt ook, dat y een functie van x is, als $y = 2x + 5$. ...
> Er heeft zich de laatste jaren een strijd ontwikkeld, welk van de beide functiebegrippen didactisch het beste als uitgangspunt gekozen kan worden. Daarmee hangt samen de vraag, of men bij het tekenen van grafieken direct de Y-as wil invoeren of niet. (blz. 55)

En verder:

> Onder $\sqrt{a}$ wordt per definitie een getal verstaan, dat groter dan of gelijk aan 0 is. Vat men $\sqrt{x}$ op als een tweewaardige functie, dan bedoelt men, dat men te maken heeft met een relatie, door middel waarvan aan elk positief getal een tweetal getallen toegevoegd wordt. Deze relatie kun-

nen we noteren $y^2 = x$, zodat we in dit verband het wortelteken kunnen ontberen. Bij het rekenen kunnen we niet volhouden, dat b.v. $\sqrt{4}$ hetzelfde betekent als ± 2. Allereerst is niet duidelijk wat b.v. $\sqrt{4} + \sqrt{9}$ zou betekenen en ook begrijpen we niet, wat nu bedoeld zou worden met een vraag als: voor welke waarden van x is $\sqrt{(x + 5)} < 2x$? (blz. 52)

Om misverstand te voorkomen: ik heb dit rapport zelf geschreven. Ik herinner me uit de discussie over deze passage dat de vraag rees of een tweewaardige functie wel een functie was. Ik beweerde dat het geen functie was, maar een relatie. Men was het hier niet zonder meer mee eens. Als vertegenwoordiger van het universitair onderwijs was prof. Loonstra aanwezig. Op de vraag of een tweewaardige functie een functie was óf een relatie bleef hij het antwoord schuldig. Hij zou het aan collega's vragen. Na een maand zei hij, het aan diverse collega's gevraagd te hebben, maar die wisten het ook niet. Tenslotte had hij het Heyting gevraagd. En die zei, dat het geen functie was, maar een relatie! Daarmee was het pleit beslist. (De discussie zou tegenwoordig zeker anders verlopen.)
De goniometrische functies gaven ook enkele moeilijkheden. sin x rad was de sinus van een hoekgrootte. Het argument van deze functie was dus een hoekgrootte, de functiewaarde een reëel getal. Daarentegen was sin x een functie waarvan zowel argument als functiewaarde een reëel getal is. Men kan sin x wel, maar sin x rad niet differentiëren. Want in een differentiequotiënt, zoals

$$\frac{\sin 0{,}1 \text{ rad} - \sin 0 \text{ rad}}{0{,}1 \text{ rad} - 0 \text{ rad}},$$

zou men een getal moeten delen door een hoekgrootte en dat kan niet. (zie blz. 75)
Een ander hangijzer: de rijen en de reeksen. Niet zonder moeite kwamen we erachter dat bij het universitair onderwijs de term 'reeks' een andere betekenis had dan bij het vhmo. En dat hetgeen wij 'reeks' plachten te noemen op de universiteit 'rij' heette. En zo deed bij het vhmo de rekenkundige rij en de meetkundige rij zijn intrede en spraken we voortaan van een rij van de sommen, som van de getallen van een oneindige rij en sommeerbare rij. Dat een rij niets anders is dan een functie met domein $\mathbb{Z}^+$ kwam nog niet in ons op. (zie blz. 57-58 en 188)

Tot goed begrip van de tijdgeest verwijs ik nog naar een artikel getiteld 'Over het gebruik van "of" en "en" bij het oplossen van ongelijkheden', dat staat in Euclides 34 (1958-59), blz. 193-199. Ik verdedig daarin dat men bij het oplossen van een ongelijkheid als $x^2 - 5x + 4 > 0$ bij voorkeur als volgt te werk gaat.
$x^2 - 5x + 4 > 0$ is gelijkwaardig met
$(x - 1)(x - 4) > 0$ en dit is weer gelijkwaardig met
$x < 1$ *of* $x > 4$.
Als oplossing wordt echter ook wel gegeven
$x < 1$ *en* $x > 4$.

> Over de kwestie, aan welke van deze twee schrijfwijzen de voorkeur gegeven moet worden, heerst geen eenstemmigheid onder de wiskundeleraren. (blz. 193)

Wie dit nu leest, hoort zijn oren klapperen. Onvoorstelbaar is dat toen het inzicht in elementaire logische zaken, als 'oplossen van een ongelijkheid', 'gelijkwaardigheid van uitspraken', 'of' en 'en', zo gebrekkig was.

Buiten onze grenzen

In de tweede helft van de vijftiger jaren begon zich allerwegen een streven te ontplooien het wiskundeonderwijs op de helling te zetten. Niet alleen op het Europese continent, maar ook in Groot Brittannië en in de USA hield men zich hiermee bezig. Enerzijds had de wiskunde zelf de laatste vijftig jaren sterke veranderingen ondergaan. Anderzijds, en dat was nog van meer belang, had de wiskunde in het maatschappelijk bestel een ruimere plaats gekregen.
Wie geen wiskunde kon beoefenen, kon in het maatschappelijk proces niet meer meekomen. Een natie die zijn wiskundeonderwijs verwaarloosde verwaarloosde zijn toekomst.
Tekenend hiervoor is het volgende. De Griekse regering was in het begin van de jaren 60 van mening, dat Griekenland op industrieel gebied achter dreigde te raken. Wil men de industrie verstevigen, dan moet men aan de basis beginnen en dus: beter wiskundeonderwijs. Daarom werd door de regering een hoogleraar, Prof. Panagakis, uitgezonden naar West-Europa met de opdracht het

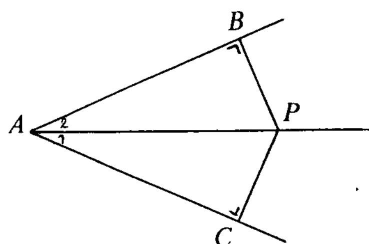
vernieuwde of zich vernieuwende onderwijs daar te onderzoeken en hierover te rapporteren. Zijn reis mocht twee jaar duren. Het resultaat is inderdaad geweest dat in Griekenland gemoderniseerde schoolboeken het licht zagen.
Eind 1959 werd door de OEES (Organisatie voor Europese Economische Samenwerking; later overgegaan in de OESD) een conferentie belegd in Royaumont. Daar zijn 45 wiskundigen uit 18 verschillende landen twee weken lang in retraite bijeen geweest om methoden te bespreken die tot beter onderwijs konden leiden.
Op de laatste dag werd een resolutie aangenomen die van groot belang geweest is. De regeringen van de deelnemende landen werd verzocht te bevorderen dat teksten met vernieuwde leerstof geschreven zouden worden, dat hiermee op scholen geëxperimenteerd zou worden en dat ook eindexamens afgenomen zouden worden conform deze experimenten. Vooral deze laatste zinsnede was interessant; in ons land zouden dergelijke eindexamens een novum zijn.
In ons land resulteerde deze aanbeveling in de instelling van de CMLW (Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde) in 1961. Was tot nog toe onderwijsvernieuwing een nationale zaak geweest, thans werd men geleid door veel invloeden van buitenaf. Welke waren deze invloeden?
In Royaumont speelde Dieudonné een centrale rol. Zijn grote intelligentie en zijn daarmee evenredig stemvolume maakten dit mogelijk. Hij was Bourbakist en als zodanig voorstander van een opbouw van de wiskunde langs de lijnen van structuren. Hij wist een groep medestanders te verenigen. In 1960 kwamen deze samen in Dubrovnik. Ze besteedden vier weken aan het opstellen van een synopsis die als richtlijn kon dienen bij het ontwerpen van teksten voor experimenten. De deelnemers waren 16 prominenten uit diverse landen; er bevond zich geen Nederlander onder. De 'Synopsis for modern secondary school mathematics' verscheen in 1961, uitgegeven door de OEES.
Ondertussen zat men niet stil. In België werden al direct studiedagen georganiseerd door Papy. Aanvankelijk ieder jaar in Arlon; na tien jaar werd de serie voortgezet in Knokke. Papy was geestverwant van Dieudonné. Hij had zeldzame didactische gaven en was uitermate geschikt als leider op te treden bij het herscholen van leraren. Enkele jaren later begon hij aan zijn standaardwerk 'Mathématique Moderne', waarvan vijf delen zijn verschenen. Deze boeken waren even glashelder als zijn voordrachten. Ik heb persoonlijk veel van hem geleerd. Toch heb ik het betreurd dat zijn ideeën ongemitigeerd doorgevoerd werden bij het constitueren van het nieuwe programma, dat in 1968 in België ingevoerd werd. Zijn opvattingen zijn ook in ons land niet zonder invloed geweest.
Typische kenmerken van de methode Papy waren:
- wiskunde moet zo streng mogelijk gegeven worden (planimetrie dient in de eerste klas al strikt axiomatisch opgebouwd te worden)
- het structuurbegrip dient centraal te staan in het curriculum
- er moet zoveel mogelijk van symbolentaal gebruik gemaakt worden (op mij maakte het wel eens de indruk dat symboolgebruik tot een soort geestelijke zelfbevrediging werd).

In Engeland sloeg men andere wegen in. Het meest bekend was daar het werk van de SMP (School Mathematics Project), onder leiding van Thwaites. Wiskunde werd door hen niet als autonome wetenschap geïntroduceerd, maar van meet af aan in relatie tot de toepassing.
Wolters-Noordhoff stuurde een deputatie naar Schotland om daar het onderwijs te bestuderen. Ze kwam enthousiast terug met exemplaren van de Schotse Methode, die verwantschap vertoonde met het werk van de SMP, maar totaal afweek van de opvattingen van Dieudonné. Deze methode heeft vooral invloed gehad op de manier waarop het programma 1968 uitgewerkt is. De uitgave Moderne Wiskunde is eruit voortgekomen.
Het programma 1968 en de wijze waarop het uitgewerkt is, zijn algemeen bekend. Ik wil me er nu toe beperken enkele facetten hiervan nader onder de loep te nemen.

Verzamelingen

In 1959 adviseerde de nomenclatuurcommissie de term 'meetkundige plaats' te vervangen door 'verzameling'. Deze aanbeveling werd spoedig algemeen opgevolgd en zo deden verzamelingen op zeer bescheiden schaal hun intrede in ons onderwijs.
Ik herinner me nog hoe vroeger, in mijn hbs-tijd, de meetkundige plaatsen behandeld werden.

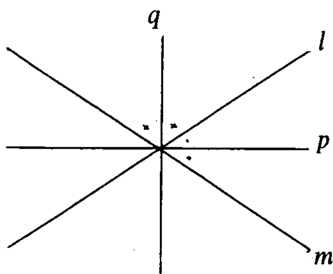
De meetkundige plaats van de punten binnen een hoek die gelijke afstand hebben tot de benen van die hoek, is de bissectrice van de hoek.
Hier staan eigenlijk twee stellingen, namelijk:
1e als een punt op de bissectrice van een hoek ligt, dan heeft het gelijke afstanden tot de benen van de hoek
2e als een punt gelijke afstanden tot de benen van de hoek heeft, dan ligt het op de bissectrice.
En dan kwam er twee keer een figuur, gegeven, te bewijzen en een bewijs. Het was een hele kluif.
De term 'verzameling' suggereerde dat we met één stelling te maken hadden: een punt P heeft gelijke afstanden tot de benen van een hoek – is gelijkwaardig met – P ligt op de bissectrice van de hoek.
Nu het bewijs.



$\angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow \triangle APB \cong \triangle APC \Rightarrow BP = CP$
En we kunnen ook terug:
$\angle A_1 = \angle A_2 \Rightarrow \triangle APB \cong \triangle APC \Rightarrow BP = CP$
Wel even nadenken, want er wordt nu een ander congruentiegeval gebruikt.
Nu 1968. Het oplossen van een vergelijking, zoals $x^2 - 5x = -4$, of een ongelijkheid, zoals $x^2 - 5x > -4$, betekende niets anders dan het zoeken van de verzameling (bijv. reële) getallen x waarvoor $x^2 - 5x = -4$ resp. $x^2 - 5x > -4$.
Het spreekt welhaast vanzelf dat men bij het oplossen van de vergelijking of ongelijkheid deze steeds vervangt door één met dezelfde oplossingsverzameling. En $x^2 - 5x = -4$ heeft dezelfde oplossingsverzameling als $x^2 - 5x + 4 = 0$
wil niets anders zeggen dan
$x^2 - 5x = -4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$.
Zo ontstond de volgende schablone:
$x^2 - 5x = -4 \Leftrightarrow$
$x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow$
$(x - 1)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow$
$x - 1 = 0$ of $x - 4 = 4 \Leftrightarrow$
$x = 1$ of $x = 4$
De oplossingsverzameling is $\{1, 4\}$.

Zelfs heb ik, tot mijn grote schrik, in een schoolboek wel eens gevonden:
$x = 1$ of $x = 4 \Leftrightarrow S = \{1, 4\}$.
Wat deed de leerling? Die loste normaal de vergelijking op, herinnerde zich dan dat hij overal nog $\Leftrightarrow$ achter moest zetten, omdat de leraar het anders fout rekende en deed dat. Eenvoudiger is natuurlijk: als je de vergelijkingen gewoon onder elkaar zet, bedoel je daarmee dat ze gelijkwaardig zijn. Zijn ze het niet, nu, dan heb je een fout gemaakt.
En waarvoor moet die oplossingsverzameling er nog eens apart achteraan gezet worden, als je hem al gevonden hebt? Je kunt toch rustig stoppen bij $x = 1$ of $x = 4$.
Essentieel is dat een leerling begrijpt wat oplossen van een vergelijking wil zeggen. En dat hij op de een of andere manier het vermeldt, als de gelijkwaardigheid niet gewaarborgd is. Zelf deed ik dat door een verticale pijl naar boven of naar beneden naast de redenering te zetten, als er alleen maar eenrichtingsverkeer was.
En als er nulrichtingverkeer was, zoals bij
$f(x) > g(x)$
$(f(x))^2 > (g(x))^2$
uiteraard een streep erdoor.
Van belang is wel een correct gebruik van de termen 'en' en 'of'.
Direct hiermee hangt samen doorsnede en vereniging van verzamelingen. En bij eenrichtingsverkeer speelt deelverzameling een rol. Het gebruik van verzamelingen en van logische operaties hebben zonder twijfel verduidelijkend gewerkt. Vergelijk nog eens met het 'klimaat' van voor 1968. Dan is er toch wel veel verbeterd.
Nu de keerzijde. Van meet af aan is de mening van de CMLW geweest dat verzamelingentaal een goede taal was om in voorkomende gevallen zich scherp uit te drukken, maar dat verzamelingen geen eigen leven moeten gaan leiden. Verzamelingen moet geen apart hoofdstuk van het curriculum worden, doorspekt met opgaven over doorsnede en vereniging, al of niet toegelicht aan de hand van venn-diagrammen. En misschien wel resulterend in stellingen, zoals distributieve eigenschappen of zelfs De Morgan. Net zo min als logica een eigen leven moet gaan leiden onder gebruikmaking van tabellen met waarheidswaarden. Dit alles heeft weinig nut. Men leert niet goed te denken door eerst de logische regels te leren en die dan toe te passen.

Nu de meetkunde. Van oudsher gaan we in de planimetrie uit van twee bouwstenen: het punt en de rechte lijn. Een punt ligt op een rechte lijn. In de eerste axiomatiek van de meetkunde (Hilbert, 1899) zijn 'punt' en 'rechte lijn' grondbegrippen en is 'ligt op' een grondrelatie. Eerst in deze eeuw kwam daarin verandering. Men ontdekte dat een fraaiere opbouw van de meetkunde verkregen werd door alleen uit te gaan van het grondbegrip 'punt' en een rechte lijn te beschouwen als een verzameling punten. We dienen dan niet meer te spreken van een punt *op* een rechte lijn, maar van een punt *van* een rechte lijn. Zo ontstond de volgende symboliek: 'P ligt op l' werd '$P \in l$', '$l // m$' werd '$l \cap m = \varnothing$', 'l snijdt m in S' werd '$l \cap m = \{S\}$'. En vergeet vooral deze accoladen om 'S' niet, want dan staat er onzin. Reeds in de brugklas werd de rechte lijn geïntroduceerd als verzameling punten en werd bovengenoemde symboliek doorgevoerd. Ik moet bekennen dat ik daar zelf aan heb meegewerkt. Didactisch onverantwoord. Een leerling van 12 jaar moet men geen stof voorzetten in een vorm die voor hem wezensvreemd is. Het spreekt haast vanzelf dat hij dan steeds weer schrijft:
'$l \cap m = S$', want het snijpunt is toch S!
Later wordt de rechte lijn vanzelf een puntverzameling en dan heeft niemand er moeite mee. Maar nu duikt een andere moeilijkheid op. Aan welk van de volgende twee uitdrukkingswijzen geeft u de voorkeur?



- De verzameling van de punten met gelijke afstand tot l en m bestaat uit de lijnen p en q.
- $\{X \mid d(X, l) = d(X, m)\} = p \cup q$.

Ik zou in dit verband twee dingen willen opmerken.

- Een symbolische schrijfwijze dient om het de gebruiker (zowel de producent als de consument) gemakkelijk te maken. Hij kan zich kort en overzichtelijk uitdrukken en soms zelfs scherper dan door middel van woorden.
- In het bovenstaande voorbeeld is zonder twijfel voor wiskundig minder begaafde leerlingen de eerste schrijfwijze (in woorden) duidelijker en overzichtelijker dan de tweede (symbolische).

Het gevaar dreigt dus dat we door te sterk de nadruk te leggen op symbolische schrijfwijzen leerlingen een slechte dienst bewijzen.
Met name de mavo- en lbo-leerlingen hebben hiervan schade ondervonden. Vooral in de beginjaren heeft men zich bij het opstellen van multiple choice opgaven ingespannen opgaven te bedenken waarvan de essentie bestond uit het kunnen ontrafelen van bepaalde notaties. Dit geschiedt weliswaar hoe langer hoe minder, maar het gebeurt nog steeds.
Ik ben blij dat Anne van Streun hier de kat de bel heeft aangebonden. Te meer daar er op korte termijn iets aan gedaan kan worden. In het nomenclatuurrapport staan sterretjes bij die termen en notaties die voor mavo-lbo niet verplicht zijn. *De derde nomenclatuurcommissie kan voorstellen aan de CEVO doen dit aantal sterretjes zo uit te breiden dat men op de C en D examens niet meer geplaagd kan worden door minder gewenste notaties.*
Verder kan ik echter niet nalaten tot voorzichtigheid te manen. De hervormingen in 1968 op het gebied van verzamelingen, logische operaties, oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden e.d. hebben stellig ook gunstige effecten gehad. Het 'klimaat' is er aanmerkelijk door verbeterd. Dat men thans wat badwater weg wil gooien, is begrijpelijk. Ik hoop alleen dat men het kind wil sparen. Correct denken en je gedachten correct formuleren blijf ik een van de belangrijkste dingen vinden in ons wiskunde-onderwijs. Het zou jammer zijn, als men hier een stap terug zou doen.

Functie en relatie

Eerst iets over het 'klimaat'. Omstreeks 1960 kwam de term 'relatie' bij mijn weten in ons onderwijs niet voor. Wel werd soms gevraagd: welke betrekking bestaat er tussen a en b als ... Kwam deze vraag voor het eerst voor, dan rezen er moeilijkheden. De leerlingen vroegen mij wat een betrekking was. Mijn antwoord was: een betrekking, dat is zoiets als bijv. $a^2 + b^2 = 3a + b$ of $a - b = 7a^3 - 5$. Na verloop van tijd moest ik dit redresseren en vertellen dat het ook wel kon dat a en b niet allebei voorkwa-

men. En eigenlijk had ik er nog aan toe moeten voegen, dat ze ook allebei mochten ontbreken. En natuurlijk kan in een betrekking tussen a en b ook nog wel een andere letter (parameter) voorkomen, zoals in $a^2 + b^2 = r^2$. Als ik dit nog eens nalees, had ik ook wel kunnen zeggen dat alles een betrekking tussen a en b is. Dat is ook weer niet helemaal juist, want: er is een a en een b zo dat $a^2 + b = 0$, is geen betrekking tussen a en b, maar een ware uitspraak. De variabelen a en b mogen namelijk niet gebonden voorkomen. Hoe het ook zij, wat een betrekking nu eigenlijk is, bleef onduidelijk. Er mocht wel enige klaarheid komen.
En die kwam er. In 1968 kreeg men gevoel voor precieze omschrijvingen en voor een duidelijk gestructureerde opbouw. Dat resulteerde in het volgende. Verzamelingen staan centraal. Relaties zijn niets anders dan een bijzonder soort verzamelingen, namelijk verzamelingen van geordende paren. Nauwkeuriger gezegd: een relatie van V naar W is een deelverzameling van het cartesisch produkt $V \times W$. En een functie is een bijzonder soort relatie. Een functie van V naar W is een relatie van V naar W met de eigenschap dat elk element van V in hoogstens één geordend paar ervan als eerste element voorkomt. Dit sluit als een bus en men kan het in elk logicaboek vinden. Ik zou Freudenthal tekort doen, als ik niet vermeldde dat hij een uitzonderingspositie inneemt: in zijn 'Exacte logica' heeft hij het functiebegrip losgekoppeld van het begrip relatie.
Laat ik direct opmerken dat ik volkomen achter deze opvatting gestaan heb en hem gestimuleerd heb. Al spoedig bleek echter, dat deze invoering van eerst relaties en daarna functies als speciaal soort relaties didactisch een mislukking was. Wie aan de hand van voorbeelden enig intuïtief inzicht gekregen heeft in de essentie van de begrippen relatie en functie, wordt zo een formele definitie voorgeschoteld waarin hij deze essentie niet herkent. De definitie sluit als een bus, maar hij leeft niet. Een ander bezwaar is, dat men verplicht wordt eerst door de rijstebrijberg van de relaties heen te bijten voordat men aan de functies toekomt.
Wat is een functie van V naar W eigenlijk? Een soort toevoeging (koppeling). Bij elk element van V hoort een element van W. Dat is alles. In tweede instantie merk je op dat sommige elementen van V daarbij buiten schot kunnen blijven. Dat is het functiebegrip zoals het bij elk normaal mens leeft. En de relatie? Dat is ook een koppeling, maar van wat algemener aard. Bijvoorbeeld: oom – neef. Elke oom kan een aantal neven hebben. Het kan er één zijn, het kunnen er ook meer zijn. Misschien wel geen één, als de oom alleen maar nichtjes heeft. En elke neef kan één of meer ooms hebben of misschien geen één en alleen maar tantes. In de wiskunde gaat het net zo. Daar wemelt het van relaties: punt P ligt op lijn l, $a^2 + b^2 \geqq 16$, $\sin \alpha = \sin \beta$. Heb je te maken met een relatie tussen reële getallen (in 1968: een relatie van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$), dan kun je daarvan een grafiek tekenen. Dat is alles wat van relaties belangrijk is. Wie er meer over vertelt en daar nog series vraagstukken aan vastkoppelt ook, verdoet zijn tijd.
Verzamelingen, functies en relaties zijn essentiële bouwstenen van ons denken. Ze komen overal voor, in het maatschappelijk leven, in elke wetenschap en zeker in de wiskunde. In 1968 zijn ze van gereedschap tot object van onderzoek geworden. Dat was de fout. Maar gereedschap blijven ze en we moeten niet schromen dit gereedschap bij zijn naam te noemen. Er is tegenwoordig een streven het woord 'relatie' een verboden woord te vinden. En liever niet de term 'functie' te gebruiken uit vrees dat de hel losbarst. Dat is badwater + kindstrategie. Vergeef me deze ontboezeming; ik hecht hier veel waarde aan.

De meetkunde

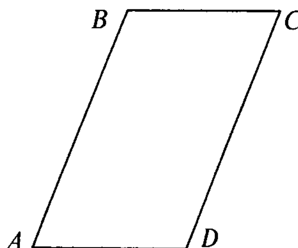
De slogan waarmee de deelnemers in Royaumont ontvangen werden, was: A BAS EUCLIDE. Dit stond al meteen in grote letters op het bord. Zoals bekend, was de auteur van deze slogan Dieudonné. Zijn toelichting was: als er een koninklijke weg is om door te dringen in het hart van de meetkunde, waarom zou je dan de bochtige weg inslaan die Euclides gegaan is? En deze koninklijke weg was: maak gebruik van structuren. Wie enerzijds op de hoogte is van het Erlanger Programm van Felix Klein en anderzijds van de opbouw van meetkunde als lineaire ruimte voorzien van een inprodukt, kan zich voorstellen wat de bedoeling van Dieudonné was en waartegen hij zich afzette. In onze schoolplanimetrie voor 1968 stond de driehoek centraal. Driehoeken, de vijf congruentiegevallen en later

ook de gelijkvormigheidsgevallen bepaalden de inhoud van de leerstof. Hiertegen was het verzet van Dieudonné gericht. Natuurlijk ontmoette hij ook verzet. Een Amerikaanse leraar, Rourke, merkte op: ik durf niet in de VS terugkomen en beweren dat ze de congruentiegevallen niet meer moeten behandelen, want dan word ik voor gek verklaard.

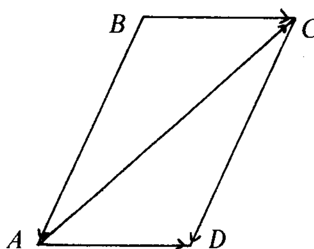
Wat resulteerde hieruit in Nederland? Een totaal andere opbouw van de planimetrie waarbij van twee hulpmiddelen gebruik gemaakt wordt: transformaties en vectoren. Deze herinneren resp. aan Felix Klein en aan de lineaire algebra. Transformaties bleken voortreffelijke hulpmiddelen te zijn om snel een heleboel eigenschappen af te leiden. Vierhoeken werden gedefinieerd met behulp van symmetrie-eigenschappen. Zo was een parallellogram een punt-symmetrische vierhoek en een rechthoek een vierhoek met twee symmetrieassen die niet door de hoekpunten gaan (per definitie). Het lag voor de hand dat het trapezium uit de belangstelling verdween en plaats maakte voor de vlieger. Uit de definitie van de rechthoek volgden ogenblikkelijk de eigenschappen ervan: de hoeken zijn gelijk en dus recht, overstaande zijden zijn gelijk, de diagonalen verdelen elkaar in vier gelijke stukken. Omkeringen waren moeilijker. Hoe zou men moeten aantonen dat een vierhoek met vier rechte hoeken een rechthoek is? Aardige oefening voor leraren. Ik vermoed dat ze in de klas wel een oogje dicht zullen doen bij dergelijke problemen.

Een ander hulpmiddel waren de vectoren. Deze werden gebruikt bij de definitie van de vermenigvuldiging en bij het afleiden van eigenschappen als: in $\triangle ABC$ zijn D en E de middens van de zijden AC en BC; dan is $DE//AB$ en $DE = \frac{1}{2}AB$.
Ik heb de indruk dat die vectoren nooit goed uit de verf zijn gekomen. Begrijpelijk, want zonder inprodukt zijn ze maar een halfslachtig hulpmiddel en met inprodukt dreigt planimetrisch inzicht schuil te gaan achter rekenwerk.

Voor de aardigheid hierbij een stelling die zowel met transformaties als met vectoren eenvoudig te bewijzen is:
Als in vierhoek $ABCD$ geldt $AB//CD$ en $AB = CD$, dan is ook $AD//BC$ en $AD = BC$.
Bewijs met transformaties

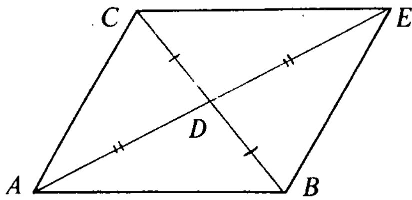


Bij de translatie over AD is lijnstuk DC het beeld van lijnstuk AB en dus C het beeld van B. Dan is $AD//BC$ en $AD = BC$.
Bewijs met vectoren



$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CD}$
$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$
Wegens $\vec{BA} = \vec{CD}$, is dan $\vec{AD} = \vec{BC}$.
Aan dergelijk soort bewijzen zijn we niet toegekomen. De planimetrie is in een vrij rudimentair stadium blijven steken. Oorzaak: als je weinig aan planimetrie doet, kun je best je eindexamen halen. Hewet B heeft hier een stokje voor gestoken. Ik ben benieuwd hoe het zal aflopen. Men is al driftig aan het terugredeneren. Wat moet je van planimetrie 'weten' om eindexamen te kunnen doen? Is dit de aangewezen weg?
Volgens mij had Dieudonné met zijn 'A bas Euclide' gelijk. Toch bekruipt velen een gevoel van nostalgie, als ze aan die goede oude planimetrie terugdenken. Ik moet toegeven dat ik er ook niet zonder weemoed afscheid van genomen heb. Verder hoort men een meer wetenschappelijke bedenking: het deductieve element is met de vernieuwing van de planimetrie uit ons onderwijs verdwenen.
Dit deductieve element bestond uit het zogenaamde redeneren zonder van de figuur gebruik te maken. Deden we dat heus? Ik geef een ietwat gechargeerd voorbeeld.

In $\triangle ABC$ is AD een zwaartelijn. Deze is verlengd met een lijnstuk $DE = AD$. Nu is $ABEC$ een parallellogram. Waarom?



Bij het formuleren van deze vraag is vooropgesteld dat de lezer de figuur voor ogen heeft. Ik heb hem er dan ook maar bij getekend. Verder zien we in de figuur dat $ABEC$ een vierhoek is. Daarvan is gegeven dat $BD = DC$ en $AD = DE$. Volgens stelling nummer zoveel is $ABEC$ dan een parallellogram.
In dit laatste zinnetje schuilt de deductie. De rest is afgelezen uit de figuur. Nadere analyse leert dat eigenlijk al onze bewijzen voor een groot percentage bestaan uit het raadplegen van de figuur en dat de eigenlijke deductie betrekkelijk summier is. Hetgeen trouwens ook bij Euclides het geval was.
In de meetkunde wordt niet echt gededuceerd, maar geconcludeerd. Net als in de algebra. Deduceren is het trekken van conclusies zonder gebruik te maken van de betekenis van de erin voorkomende begrippen en relaties, zoals Hilbert dat deed. Wie zijn leerlingen de betekenis van een deductief systeem wil bijbrengen, moet andere wegen inslaan. Het best is groepentheorie te bedrijven. Daar gaat men uit van axioma's die betrekking hebben op volmaakt ongespecificeerde begrippen en relaties. Ook in de lineaire algebra doet men dat. Maar deze heeft het nadeel dat de leerling zich reeds een voorstelling van een vector gemaakt heeft en nu moeite heeft zich daarvan los te maken.

Stereometrie

Eerst even terug naar 1958. Toen is de trigonometrie uit de leerstof geschrapt. Waarom? De eigenlijke oorzaak was, dat we er op uitgekeken waren. Het vak was vervelend geworden; het was doodgeëxamineerd. Daarom moest het verdwijnen. Iemand met een profetische blik merkte toen reeds op: het eerstvolgende vak dat jullie de nek omdraaien, is stereometrie.

Als ik aan stereometrie terugdenk, denk ik ogenblikkelijk aan figuren van een kubus, een regelmatige vierzijdige piramide of iets dergelijks. In zo'n figuur moest je dan een constructie uitvoeren en tot vervelens toe berekeningen maken. Op het eindexamen namen dergelijke opgaven een centrale plaats in. En in het onderwijs dus ook. Dit beeld zal wel wat te eenzijdig zijn. Maar hoe het ook zij, de aard van de examenopgaven hebben er in niet geringe mate toe bijgedragen, dat men in 1968 zonder veel tranen te laten van de stereometrie afscheid nam. Niet helemaal, want stereometrie bleef voortleven in wiskunde II en dat was misschien wel een excuus ervoor het vak elders te schrappen. Maar wiskunde II bleek door geen enkele studierichting verplicht gesteld te worden en, wat erger is, bij de didactische uitwerking van dit vak kwam het stereometrisch inzicht op de achtergrond en was men tevreden met rekenwerk. Hetgeen niet de bedoeling is geweest, maar de praktijk heeft geleerd dat in wiskunde II stereometrisch inzicht irrelevant werd. De protesten bleven niet uit en gelukkig is men nu de schade aan het herstellen.
Inderdaad: in 1968 hebben we het stereometriekind met het badwater weggegooid. Ik blijf hopen dat er niet meer kinderen op deze wijze zullen verdwijnen.

Rekentuig

Van oudsher is de logaritmentafel het hulpmiddel geweest waarvan men zich bediende bij het uitvoeren van berekeningen. Aanvankelijk was dat de tafel met vijf decimalen, met als pikante nevenactiviteit het interpoleren. Dat ging op de duur vervelen en daarom ging men ertoe over tevreden te zijn met vier decimalen.
In 1968 is men tot modernisering overgegaan. Verplicht werd gesteld het gebruik van ... de rekenliniaal! Ik hoor in gedachte al het hoongelach van vele lezers. Maar heus, dit was een adequate modernisering. Een technicus liep toen met een rekenliniaal in zijn zak en voerde daar berekeningen mee uit.
Ongeveer tien jaar gelden rees de vraag: moet het kandidaten toegestaan worden op het eindexamen een zakrekenmachientje te gebruiken? Het antwoord van de inspectie luidde: neen. Met als motivering: de beter gesitueerde leerlingen kunnen zich de luxe van een zakrekenmachientje veroorloven,

maar voor vele minder gesitueerde is zo'n apparatuur te duur. Dus 'neen' op grond van sociale rechtvaardigheid. Een toen alleszins verantwoord standpunt.
Weer enkele jaren later waren de rekenmachientjes gemeengoed geworden. Het gebruik ervan op de eindexamens werd verplicht gesteld.
Men ziet hier weer eens hoe snel de toestand zich verandert. Maar tevens beseft men dan welk een weg men in gedachten terug moet afleggen om zich weer te verplaatsen in de situatie rond 1968.

Toepassingen

Toepassingen van de wiskunde hebben lange tijd een kwijnend bestaan geleid. Voor mijn tijd, dus voor 1921, heeft op het programma van de hbs gestaan het vak boldriehoeksmeting. Dit was een nuttig vak want in de scheepvaartkunde had men het nodig. Het is verdwenen. Meer weet ik er niet van.
In mijn schooltijd werden we geplaagd met samengestelde intrest. Ik geloof niet dat iemand het leuk vond. Toen ik in 1934 leraar werd, was het vak juist van het eindexamen verdwenen. Voor mij een reden het beslist ook niet meer te doceren. Een boze inspecteur voegde mij toe: als ik merk dat het vak nu niet meer behandeld wordt, zet ik het weer op het eindexamenprogramma. En dat is het laatste wat ik ooit over samengestelde intrest gehoord heb.
Bleef nog de toepassing van de trigonometrie op de landmeetkunde met als klapstuk het probleem van Snellius. Niemand heeft het betreurd dat in 1958 met de trigonometrie ook Snellius ter ziele ging.
En toch voelden velen in hun achterhoofd best dat toepassingen van belang waren, maar ze wisten er geen weg mee.
In 1968 dook het probleem van de toepassing weer op. We hebben een ogenblik gedacht aan toepassingen van de analyse, maar slaagden er niet in hier redelijke inhoud aan te geven. Dan computerkunde. Dit vak stond nog te veel in de kinderschoenen. Er was op zeer bescheiden schaal mee geëxperimenteerd. De laatste heroriënteringscursus was aan de computer gewijd. Maar de know how ontbrak nog. Het was eenvoudig niet haalbaar dit vak op het programma te zetten. En zo werd het de statistiek. Dit vak was niet geheel vreemd. Het bestond reeds als facultatief onderdeel van het eindexamen gymnasium-α. In de vergadering van de NVvW waarin aan de leraren eindadvies gevraagd werd over de inhoud van het programma statistiek, waren ze doodsbang voor overlading en trachtten ze de inhoud van dit vak tot een minimum te beperken. Het advies luidde zelfs verwachtingswaarde niet in het programma op te nemen. De inspectie wilde niet tegen de haren instrijken en conform werd besloten.

Pech en geluk

Nadat het programma voltooid was, kregen de universiteiten en toenmalige hogescholen kans hun desiderata ten aanzien van vereiste vooropleiding kenbaar te maken. De ene na de andere kruisjeslijst verscheen en ten slotte, op het laatste moment, stelden de sociale wetenschappen wiskunde I verplicht. Dat was een lelijke streep door de rekening. Voor deze groep hadden we het programma stellig niet bedoeld. We vreesden nu dat velen die voor wiskunde I 'niet geschikt' waren, dit vak toch zouden kiezen, met als gevolg slechte resultaten, verlaging van het peil e.d. Aan eventuele aanpassing van het programma dachten we begrijpelijkerwijs nog niet.
Een andere handicap was de doorstroming. De CMLW heeft zich te lang alleen maar beziggehouden met het vwo. Eerst toen het vwo-programma vast stond, is begonnen met het ontwerpen van een programma voor havo en mavo. Het havo-programma werd een verlicht vwo-programma. De mavo-leerling moest kunnen doorstromen naar de havo en zo werd het programma onderbouw-havo per definitie een deel van het programma mavo-4. En mavo-3 weer een echt deel van mavo-4. Zo kwam het dat vectoren een verplicht onderdeel voor het mavo-4 gingen vormen. En ik heb nooit begrepen, wat een mavo-leerling nu eigenlijk aan vectoren had. Maar het kon niet anders. Het lbo stond apart en daarmee konden we ons nog niet bemoeien. Eerst later, nadat mavo-3 en lbo-C hetzelfde schriftelijk eindexamen kregen, werd ook het lbo relevant.
Gevolg was een geniale opwelling binnen het IOWO. We hebben altijd van boven naar beneden geredeneerd. Zo doen we mavo en lbo tekort. Laten

we nu eens onderaan beginnen. Welke wiskunde kan nuttig zijn voor een lbo-leerling? Misschien zal blijken dat, van beneden naar boven redenerend, uiteindelijk ook de vwo-leerling profijt van de resultaten kan krijgen. Zo ontstond de 'Wiskunde L.B.O.-brochure 1973'. Centraal stond niet meer de 'kale' wiskunde, maar de toepassing.
En het vwo heeft er profijt van gehad. De sociale invloeden op de kruisjeslijst (die wij aanvankelijk asociaal vonden), hadden als gevolg een groeiend protest tegen de inhoud van wiskunde I.
Kon er geen programma gemaakt worden voor die leerlingen die weliswaar wiskunde nodig hebben, maar meer speciaal om deze te gebruiken in praktisch voorkomende situaties? Dus voor hen voor wie de wiskunde middel maar beslist geen doel is? Dat kon en zo ontstond wiskunde A. Inderdaad is er een duidelijke lijn die van de brochure lbo naar wiskunde A voert. Een lijn die uitgezet is door het IOWO en niet door hem voltooid kon worden. Maar anderen, uit het IOWO voortgekomen, zijn daarin geslaagd.

Na HEWET kwam hawex. Aan de mawex zijn we nog niet begonnen. De commissie Van der Blij zal de onderbouw (12-16 jaar) herstructureren. Er blijft beweging. En in grote lijnen is volgens mij de verandering steeds weer verbetering.

Het laatste nieuws (1)

In deze rubriek zal regelmatig verslag worden gedaan van de recente ontwikkelingen rond het nieuwe leerplan wiskunde voor de onderbouw.
Op 23 en 24 januari startte de Commissie Onderbouw Wiskunde (vh 'Stuurgroep van de Blij') haar werkzaamheden met een 24-uurs conferentie. De commissie bestaat uit 25 personen. De leden van de commissie zijn uitgenodigd op persoonlijke titel of vanuit één of andere instelling (OW&OC, SLO, CITO, inspectie, opleiding/nascholing, Ned. Ver. Wiskunde-leraren, NVORWO, ministerie, Ped. Centra). Het onderwijsveld is vertegenwoordigd door drie personen: uit het basisonderwijs, het lbo en het vwo.

De staatssecretaris van onderwijs en wetenschappen, mevr. Ginjaar-Maas, vindt het dringend noodzakelijk dat op korte termijn een nieuw wiskundeprogramma wordt ontwikkeld voor mavo en lbo en voor de eerste drie leerjaren havo en vwo. Het programma dient rekening te houden met een goede samenhang tussen de schooltypes onderling en dient een goede afstemming te hebben op de basisschool en het vervolgonderwijs. Bovendien dient het nieuwe programma ook meisjes voldoende kans op succes te bieden. Daartoe verwacht ze tenminste:

- 'een advies voor een nieuw leerplan lbo, mavo en de eerste drie jaren van havo en vwo,
- een advies op grond waarvan een nieuw examenprogramma wiskunde mavo en lbo (C en D) kan worden opgesteld,
- het aangeven van aanpassingen in opleiding en nascholing van docenten om het nieuwe programma met succes te kunnen onderwijzen.'

De Commissie Onderbouw Wiskunde heeft als taak een werkplan op te stellen om tot een dergelijke advisering te komen. Op basis van dit werkplan zal een werkgroep in het leven worden geroepen. Deze werkgroep bestaat uit SLO- en OW&OC-medewerkers en zal aan de slag gaan met de ontwikkeling van het leerplan. In Nederland gebeurt dat gelukkig niet vanachter een bureau, maar op basis van onderwijs-experimenten. De werkgroep zal aan de hand van uitgetest voorbeeldmateriaal een eerste voorstel voor een leerplan formuleren in het voorjaar van 1990.
Gelukkig ligt er al het een en ander aan materiaal. De SLO heeft voor de eerste twee leerjaren pakketjes ontwikkeld en uitgeprobeerd rondom de verbanden-grafieken-lijn, rondom voortgezet rekenen en rondom de meetkunde. Er ligt nog WISKI-VON-materiaal. En de uitgevers hebben natuurlijk ook niet stil gezeten. Het moet dus mogelijk zijn om meteen in het volgende schooljaar op een aantal proefscholen te beginnen.

Het is de bedoeling dat vanaf augustus 1990 de tweede ronde experimenten start. In principe is daarvoor een open aanmelding waarbij de bovengrens van het aantal deelnemende scholen wordt bepaald door de praktische randvoorwaarden van nascholing. Ook zullen uitgevers worden uitgenodigd om in deze ronde met eigen experimenteel materiaal te werken. In het voorjaar van 1992 zal deze tweede ronde worden geëvalueerd. Dit leidt tot het definitieve rapport, zodat alle scholen in augustus 1992 met het nieuwe programma kunnen gaan werken. Het tijdschema is krap maar dit is vooral een gevolg van de randvoorwaarde, door de staatssecretaris gesteld, dat in augustus 1992 het plan op tafel moet liggen.

De gedachten gaan op dit ogenblik uit van de huidige bestaande schooltypen, waarbij echter wel rekening wordt gehouden met bestaande ideeën over basisvorming wiskunde. Ruwweg wordt daarbij gedacht aan 3 stromen:

* lbo/mavo-leerlingen die wiskunde na twee jaar laten vallen of examen wiskunde A/B doen,
* lbo/mavo-leerlingen die wiskunde C/D examen doen,
* onderbouw havo/vwo-leerlingen.

Veel meer duidelijkheid is er op dit ogenblik niet. Een aantal fundamentele vragen ligt nog open. Zoals:

- Dient er één gemeenschappelijk programma te komen voor lbo-mavo-havo-vwo voor het eerste leerjaar, de eerste twee jaren of zelfs de eerste drie jaren?
- Is het verstandig om delen uit het basisschool programma over te hevelen? Zo ja, welke?
- Is het gewenst om de wiskunde-programma's voor de laatste twee stromen af te leiden uit de eindtermen voor de basisvorming en de begin-termen van bovenbouwen vwo/havo en lang mbo?

Eén ding is echter wel duidelijk: de klus is aanzienlijk veel moeilijker dan de voorgaande HEWET- en HAWEX-klussen en moet bovendien nog in een kortere tijd geklaard worden.

Mededeling

Nederlandse Wiskunde Olympiade 1987

Op grond van de resultaten in de eerste ronde van 2059 leerlingen van 216 scholen is de cesuur gelegd bij score 15.
Dit wil zeggen dat de deelnemers van niet-eindexamenklassen die 15 of meer punten behaald hebben in de eerste ronde in aanmerking kunnen komen voor deelname aan de tweede ronde in september 1987.
De speciale prijs, ingesteld door de Staatssecretaris, voor de school met het hoogste puntentotaal van de beste drie deelnemende meisjes van die school is gewonnen door het Kottenpark College te Enschede. De drie meisjes behaalden samen 32 punten.
De wisselprijs voor de school met het hoogste puntentotaal van de beste vijf deelnemers van die school is gewonnen door het Dominicus College te Nijmegen. De vijf deelnemers behaalden samen 85 punten.

H. N. Schuring, secretaris.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan

Dr P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

563 Bewijs dat de enige oplossing van $x^2 + y = y^2 + z = z^2 + x$ in $\mathbb{Z}$ de triviale is, namelijk $x = y = z$. (Dick Gerritzen)

564 Kies 10 punten. Kies daarna n rechten zo, dat door elk van de 10 punten precies 3 van deze rechten gaan. Kies de 10 punten zo, dat men met een minimaal aantal rechten volstaan kan. Hoe groot is dit minimale aantal?

565 Uit de getallen 1 tot en met 100 kiest men aselect 5 verschillende getallen. Wat is de verwachtingswaarde van het kleinste getal?
Wat is de verwachtingswaarde van het kleinste getal als men k verschillende getallen aselect kiest uit de getallen 1 tot en met n ($k \leqq n$)?
Uit de getallen 1 tot en met n kiest men aselect k niet noodzakelijk verschillende getallen. Wat is de verwachtingswaarde van het kleinste getal? (Leon van den Broek)

Oplossingen

560 Een klas bestaat uit 45 leerlingen.
Hieronder zijn er:

25 jongens	j = 25
en dus	
20 meisjes	m = 20
Er zijn er 30 goed	g = 30
w.o. 16 jongens	jg = 16
	mg = 14
Er doen er 28 aan sport	s = 28
w.o. 18 jongens	js = 18
	ms = 10

Van degenen die aan sport doen, zijn er 17 goed:
gs = 17
Verder is jgs = 15
Hoe is deze klas samengesteld?
Uit m = 20, mg = 14 en ms = 10, volgt mgs $\geqq$ 4.
Nu is (algemeen):
aantal leerlingen = j + m + g + s − jm − jg − js − mg − ms − gs + jmg + jms + jgs + mgs − jmgs
Wegens jm = 0, krijgen we:
$45 = 25 + 20 + 30 + 28 - 16 - 18 - 14 - 10 - 17 + 15 +$ mgs
Omdat mgs $\geqq$ 4, is dit onmogelijk.

561 Hoeveel rijen van n cijfers 0 en 1 zijn er mogelijk waarin geen twee cijfers 1 naast elkaar voorkomen?
Noem dit aantal $a(n)$. Een rij van n cijfers eindigt op een 0 of op een 1. Onderstel de rij eindigt op een 0. Het voorgaande cijfer kan zowel een 0 als een 1 zijn. Zo krijgen we $a(n-1)$ mogelijkheden. Eindigt de rij op een 1 dan is het voorgaande cijfer een 0. Dit geeft $a(n-2)$ mogelijkheden. Zodat $a(n) = a(n-1) + a(n-2)$. Verder is $a(1) = 2$ en $a(2) = 3$. Dus is $a(n)$ gelijk aan de n^e term van een rij van Fibinacci die begint met 2, 3.

562 De treden van een trap zijn elk 1 of 2 lang of hoog. Hoeveel trappen met lengte n zijn er mogelijk?
Gaat men 1 naar rechts, dan gaat men 0 of 1 omhoog. Echter niet twee keer achter elkaar 0. Men krijgt zo een serie van n cijfers 0 en 1 met de eigenschap dat er geen twee 0'en achter elkaar staan. Het probleem is nu, onder verwisseling van de cijfers 0 en 1, gereduceerd tot het vorige. Het antwoord is dus hetzelfde.

Kalender

28 maart 1987: Kapellen, Studiedag NvWL/VVWL
2-4 april 1987: Ede, Didactiek-conferentie
15 en 16 april 1987: Utrecht, Nederlands Mathematisch Congres
14 april 1987: Keulen, MNU-Congres
11 sept. 1987: Eindhoven, Tweede ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade
31 okt. 1987: Bilthoven, Jaarvergadering/Studiedag NVvW
23 juli-3 aug. 1988: Budapest, ICME-Congres

Inhoud

Adressen van auteurs

H. G. B. Broekman, PDI, RU Utrecht
Heidelberglaan 2, 3584 CS Utrecht

F. M. W. Doove, Severij 5, 3155 RR Maasland

S. Kemme, Hoofdstraat 149, 9827 PA Lettelbert

Ir. H. M. Mulder, Geersbroekseweg 27,
4851 RD Ulvenhout

dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth

E. H. F. Weijgers, Wilhelminalaan 42, 2625 KH Delft